

Freie und Hansestadt Hamburg  
Behörde für Schule und Berufsbildung

## **Schriftliche Abiturprüfung**

# **Mathematik**

Beispielaufgaben für einen hilfsmittelfreien Prüfungsteil

grundlegendes Anforderungsniveau

## **Impressum**

### **Herausgeber:**

Freie und Hansestadt Hamburg  
Behörde für Schule und Berufsbildung  
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

MINT-Referat: Gestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Unterrichts  
Referatsleitung: Werner Renz

Redaktion: Manfred Bergunde und Xenia Rendtel

Hamburg, 2012, Änderungen April 2017

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Beispielaufgaben .....	4
1.1 Analysis .....	4
1.2 Analytische Geometrie und Lineare Algebra.....	6
1.2.1 Analytische Geometrie .....	6
1.2.2 Lineare Algebra.....	8
1.3 Stochastik .....	11
2. Erwartungshorizonte.....	13

# 1. Beispielaufgaben

## 1.1 Analysis

A1

EH S. 13

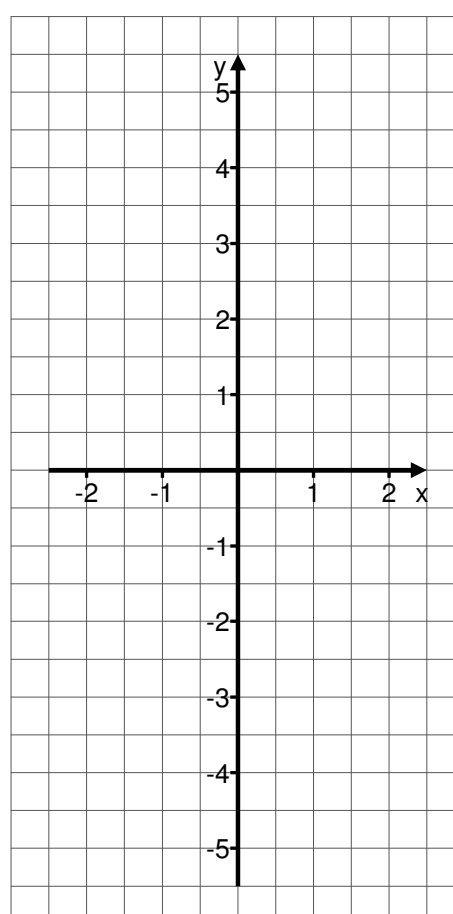
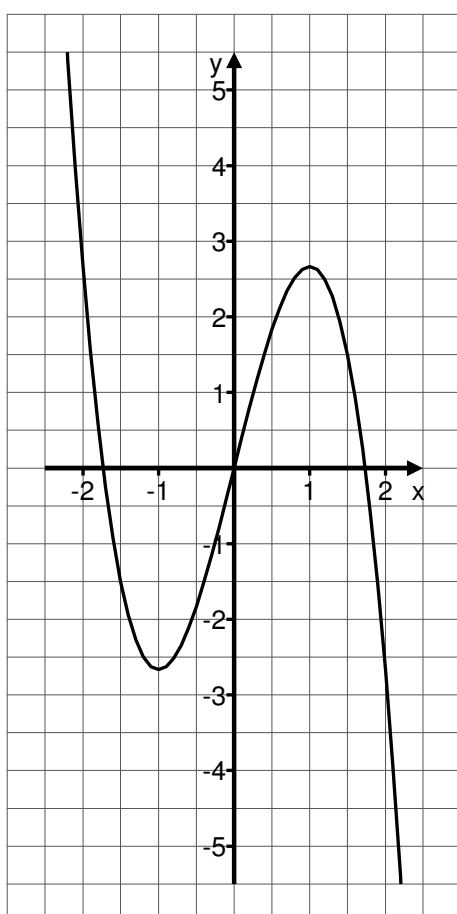
Gegeben ist die Funktion  $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Ihr Graph ist unten links abgebildet.

- a) Der einzige Wendepunkt der Funktion  $f$  liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Bestimmen Sie die Steigung im Wendepunkt.

1 BE

- b) Die Extrempunkte der Funktion  $f$  liegen an den Stellen  $x = 1$  und  $x = -1$ . Skizzieren Sie im Koordinatensystem unten rechts den Graphen von  $f'(x)$ . Beachten Sie dabei die Lage der Extrempunkte und die Steigung im Wendepunkt.

4 BE



**A2**

*EH S. 13*

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^4 + 2x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

a) Begründen Sie, warum  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

1 BE

b) Berechnen Sie  $\int_0^1 f(x) dx$ .

Geben Sie an, um wie viele Einheiten der Graph von  $f$  mindestens nach oben verschoben werden muss, wenn dieses Integral einen ganzzahligen Wert annehmen soll, und begründen Sie Ihre Angabe.

4 BE

**A3**

*EH S. 14*

In den Teich eines Botanischen Gartens werden 20 Koi-Karpfen ausgesetzt. Die Anzahl der Koi in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (in Jahren seit dem Aussetzen) werde durch die Modellfunktion  $b$  beschrieben.

Der Modellfunktion liegen folgende Annahmen zu Grunde:

- Die Maximalzahl, die sich einstellen wird, ist  $S = 80$ .
- Der jährliche Zuwachs  $[b(t+1) - b(t)]$  ist proportional zu der Differenz  $[S - b(t)]$  am Beginn eines Jahres.

Zeigen Sie, dass die Modellfunktion  $b(t) = 80 - 60 \cdot 0,5^t$  ( $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ ) der Anfangsbedingung und den Modellannahmen entspricht.

5 BE

**A4**

*EH S. 14*

Für jeden Wert von  $a$  ( $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) ist eine Funktion  $f_a$  gegeben durch  $f_a(x) = a \cdot e^{-x^2}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Bestimmen Sie  $a$  und  $b$  so, dass die Tangente an dem Graphen von  $f_a$  im Punkt  $P(1 | f_a(1))$  durch die Gleichung  $t(x) = -2x + b$  beschrieben werden kann.

## 1.2 Analytische Geometrie und Lineare Algebra

### 1.2 1 Analytische Geometrie

**G1**

*EH S. 15*

Gegeben sind die Punkte  $A(2|-2|1)$ ,  $B(-2|2|1)$  und  $C(-2|-2|5)$ .

- a) Zeichnen Sie die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  in das nebenstehende Koordinatensystem ein.

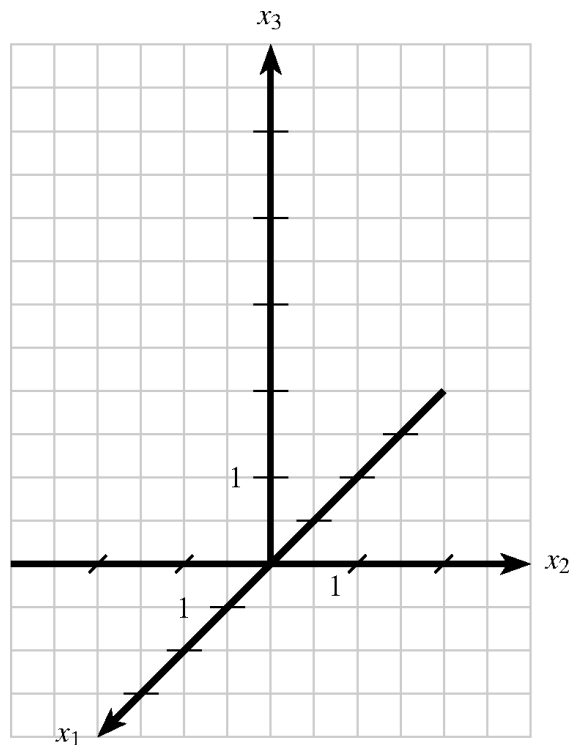
3 BE

- b) Die Verbindungsvektoren der drei Punkte sind die Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{CA}.$$

Zeigen Sie, dass das Dreieck  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck ist.

2 BE



**G2**

*EH S. 15*

Gegeben sind die Punkte  $A(3|1|1)$  und  $B(-2|2|4)$  sowie die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

- a) Bestätigen Sie, dass  $g$  durch  $A$  und  $B$  geht.

1 BE

- b) Die Geraden  $g$  und  $h$  haben genau einen Schnittpunkt. Bestimmen Sie diesen Schnittpunkt.

2 BE

- c) Geben Sie einen weiteren Punkt auf  $g$  an, der von  $A$  den gleichen Abstand hat wie  $B$ .

2 BE

**G3**

*EH S. 16*

Gegeben ist die Ebene  $E_1: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R})$ .

- a) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Ebene  $E_1$  die folgende Gleichung erfüllen:

$$7x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 .$$

2 BE

- b) Geben Sie für die Ebene  $E_2: \vec{x} = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \vec{v} \quad (p, q \in \mathbb{R})$  einen Vektor  $\vec{v}$  so an,

dass die Ebene  $E_2$  nicht identisch mit der Ebene  $E_1$  ist.

Begründen Sie, dass der von Ihnen angegebene Vektor  $\vec{v}$  die Bedingung erfüllt.

3 BE

**G4**

*EH S. 17*

Gegeben sind die Vektoren  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $\vec{r}$  orthogonal zu  $\vec{s}$  und nicht orthogonal zu  $\vec{t}$  ist.

2 BE

- b) Gegeben ist ein weiterer Vektor  $\vec{u}_z = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ z \end{pmatrix}$  mit  $z \in \mathbb{R}$ .

Zeigen Sie, dass bei geeigneter Wahl von  $z$  der Vektor  $\vec{u}_z$  orthogonal zu  $\vec{r}$  und auch orthogonal zu  $\vec{s}$  sein kann, aber nicht zu beiden Vektoren gleichzeitig.

3 BE

## 1.2.2 Lineare Algebra

### LA1

*EH S. 17*

Gegeben ist das eindeutig lösbares Gleichungssystem LGS1

$$\left. \begin{array}{l} \text{I: } 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ \text{II: } -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ \text{III: } x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\} \text{LGS1 .}$$

- a) Berechnen Sie den Lösungsvektor  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  von LGS1.

3 BE

- b) Das Lineare Gleichungssystem LGS1 werde abgewandelt in das nachfolgende Gleichungssystem LGS2:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I: } 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ \text{II: } -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ \text{III: } x_2 + ax_3 = 0 \end{array} \right\} \text{LGS2}$$

Bestimmen Sie  $a$  so, dass das neue Lineare Gleichungssystem einen Widerspruch enthält.

2 BE

### LA2

*EH S. 18*

Gegeben ist die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  und der Vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Bestimmen Sie die Produkte  $A \cdot \vec{x}$  und  $A^2 \cdot \vec{x}$ .

2 BE

- b) Für einen Vektor  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  gelte  $A \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie den Vektor  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ .

3 BE

### LA3

*EH S. 18*

Gegeben ist die Matrix  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$ .

- a) Berechnen Sie  $M^2$  und  $M^5$ .

2 BE

- b) Die Matrix  $M$  ist ein Spezialfall der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ f(x) & 0 \end{pmatrix}$ .

Definieren Sie die Funktion  $f(x)$  mit möglichst großem Definitionsbereich so, dass

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

3 BE



**LA4**

*EH S. 19*

Für ein Insekt mit den Entwicklungsstadien  $E$ ,  $L$  und  $K$  ist die Übergangsmatrix  $M$  für einen Entwicklungszyklus gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}, \text{ bezogen auf einen Populationsvektor } \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix}$$

- a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen für einen Entwicklungszyklus.

3 BE

- b) Geben Sie den Wert  $a_{33}$  der Matrix  $M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 6,4 & 1,6 \\ 0 & 0 & 4,8 \\ 0,48 & 0,16 & a_{33} \end{pmatrix}$  an.

Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes  $a_{33}$  im Kontext.

2 BE

**LA5**

*EH S. 19*

Eine Abteilung eines Industriebetriebs verarbeitet die Rohstoffe  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  zu den Zwischenprodukten  $Z_1$  und  $Z_2$ . Aus diesen Zwischenprodukten wird das Endprodukt  $E$  hergestellt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die folgenden Matrizen gegeben.

Die Rohstoff/Zwischenproduktmatrix ( $R \rightarrow Z$ ) ist  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,

die Zwischenprodukt/Endproduktmatrix ( $Z \rightarrow E$ ) ist  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Skizzieren Sie den Gozintographen.

3 BE

- b) Berechnen Sie die Matrix  $C = A \cdot B$ .

Interpretieren Sie die Bedeutung des ersten Matrixelements von  $C$  im Kontext.

2 BE

**LA6**

*EH S. 20*

Der Kulturverein einer Kleinstadt bietet seinen Mitgliedern regelmäßig drei Veranstaltungen zur Auswahl an: Konzert ( $K$ ), Theater ( $T$ ) und Kino ( $C$ ). Aus Mitglieder-Befragungen sind die folgenden Entscheidungswechsel bekannt:

- Von den Konzertbesuchern wählen beim nächsten Mal 50% Theater und 30% Kino.
- Von den Theaterbesuchern wählen beim nächsten Mal 30% Konzert und 40% Kino.
- Von den Kinobesuchern wählen beim nächsten Mal 25% Konzert und 35% Theater.

Die Anzahl der Mitglieder, die eine der drei Veranstaltungen besucht, ist als konstant zu betrachten.

a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen.

3 BE

b) Die Übergangsmatrix ist die Matrix  $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,25 \\ 0,5 & 0,3 & 0,35 \\ 0,3 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$ ,

bezogen auf einen Verteilungsvektor  $\begin{pmatrix} x_K \\ x_T \\ x_C \end{pmatrix}$ .

Begründen Sie aus dem Kontext heraus die Einträge in der Hauptdiagonalen der Matrix  $M$ .

2 BE

### 1.3 Stochastik

**S1**

*EH S. 20*

In einer Urne befinden sich 6 rote und 4 blaue Kugeln.

- a) Es wird dreimal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

$E_1$  : Unter den gezogenen Kugeln ist höchstens eine blaue Kugel.

3 BE

- b) Es wird zehnmal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Als Ereignis werde betrachtet

$E_2$  : Unter den gezogenen Kugeln sind genau  $k$  blaue Kugeln ( $k \in \mathbb{N}; k \leq 10$ ).

Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $E_2$  an.

2 BE

**S2**

*EH S. 21*

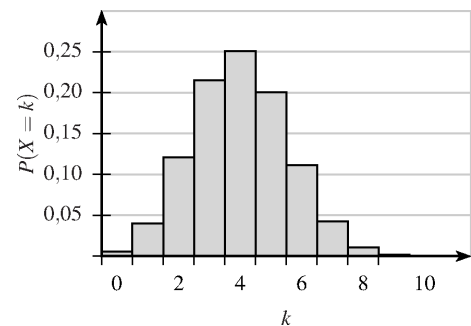
Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind binomialverteilt.

Für die Variable  $X$  ist  $n=10$  und  $p=0,4$ ;

für die Variable  $Y$  ist  $n=10$  und  $p=0,6$ .

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer der beiden

Variablen ist in der Abbildung dargestellt.



- a) Entscheiden Sie, von welcher der beiden Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeitsverteilung abgebildet ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

2 BE

- b) Begründen Sie, warum  $P(X = k) = P(Y = 10 - k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}^{\leq 10}$  gilt.

3 BE

**S3**

*EH S. 21*

Eine Zufallsgröße  $X$  habe die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

$x_i$	$P(X = x_i)$
0	0,32
1	0,36
2	0,32

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$ .

5 BE

**S4**

*EH S. 21*

In einer Reisegruppe sind 37,5% männliche Reisende (M), von diesen sind 80% im Alter von 60 und mehr (60+). Insgesamt sind 70% der Reisenden im Alter 60+.

a) Bestimmen Sie den Anteil der weiblichen Reisenden im Alter 60+ in der gesamten Reisegruppe.

3 BE

b) Insgesamt gibt es 10 mehr weibliche als männliche Reisende in der Gruppe. Bestimmen Sie die Personenanzahl der gesamten Reisegruppe.

2 BE

## 2. Erwartungshorizonte

A1

Lösungsskizze	
a)	Die Ableitung ist $f'(x) = -4x^2 + 4$ . Damit ist die Steigung im Wendepunkt $f'(0) = 4$
b)	<div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="flex: 1;"> </div> <div style="flex: 2; padding-left: 10px;"> <p>Da die Extrempunkte der Funktion <math>f</math> an den Stellen <math>x = -1</math> und <math>x = 1</math> liegen, hat die Ableitungsfunktion hier ihre Nullstellen. Da die Steigung im Wendepunkt 4 ist, ist bei <math>(0 4)</math> der Extrempunkt der Ableitungsfunktion.</p> <p><i>Hinweis:</i> Wenn in Teil a) eine andere Steigung berechnet wurde, ist der Extrempunkt folgerichtig auf eine andere Höhe zu versetzen.</p> </div> </div>

A2

Lösungsskizze	
a)	Beide Summanden im Funktionsterm sind gerade Potenzen von $x$ mit positivem Vorfaktor; sie können nicht negativ werden, ihre Summe folglich auch nicht.
b)	<p>Es ist <math>\int_0^1 f(x) dx = \left[ \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}</math>.</p> <p>Eine Verschiebung um <math>c</math> in <math>y</math>-Richtung wird beschrieben durch die Funktion <math>f(x) = x^4 + 2x^2 + c</math>. Dadurch vergrößert sich das Integral um <math>c</math>. Damit der Wert des Integrals die nächst-mögliche ganze Zahl 1 annimmt, muss <math>c = \frac{2}{15}</math> sein.</p>

**A3**

<b>Lösungsskizze</b>	
	<p><math>b(0) = 80 - 60 \cdot 0,5^0 = 80 - 60 = 20</math>, die Anfangsbedingung ist erfüllt.</p> <p>Für die Differenz <math>[S - b(t)]</math> gilt: <math>S - b(t) = 80 - (80 - 60 \cdot 0,5^t) = 60 \cdot 0,5^t</math>.</p> <p>Der jährliche Zuwachs ist</p> $b(t+1) - b(t) = 80 - 60 \cdot 0,5^{t+1} - (80 - 60 \cdot 0,5^t) = 60 \cdot (0,5^t - 0,5^{t+1})$ $= 60 \cdot 0,5^t (1 - 0,5) = 0,5 \cdot 60 \cdot 0,5^t = 0,5 \cdot [S - b(t)]$ <p>Also ist der jährliche Zuwachs proportional zu <math>[S - b(t)]</math>.</p>

**A4**

<b>Lösungsskizze</b>	
	<p>Es gelten die beiden Bedingungen:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Der Steigungsfaktor der Tangente muss gleich <math>f'_a(1)</math> sein.</li> <li>2. <math>t(1) = f_a(1)</math></li> </ol> <p>Es ist <math>f'_a(x) = -2ax \cdot e^{-x^2}</math>, also <math>f'_a(1) = -2a \cdot e^{-1} = -2 \cdot \frac{a}{e}</math>; aus <math>-2 \cdot \frac{a}{e} = -2</math> folgt <math>a = e</math>.</p> <p>Ferner ist <math>t(1) = -2 + b</math> und <math>f_a(1) = a \cdot e^{-1}</math> bzw. <math>f_a(1) = e \cdot e^{-1} = 1</math>; aus <math>-2 + b = 1</math> folgt <math>b = 3</math>.</p> <p><i>Alternative über den direkten Einsatz in die Tangentengleichung ist möglich.</i></p>

**G1**

Lösungsskizze	
<b>a)</b>	
<b>b)</b>	<p>Es ist <math>\vec{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}</math>. Damit sind alle drei Verbindungsvektoren <math>\sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}</math> lang.</p> <p>Somit liegt ein gleichseitiges Dreieck vor.</p>

**G2**

Lösungsskizze	
<b>a)</b>	<p>Da <math>A</math> der Aufpunkt von <math>g</math> ist, liegt <math>A</math> auf <math>g</math>.</p> <p>Für <math>r = 1</math> erhält man den Punkt <math>B</math>.</p>
<b>b)</b>	<p>Der Punkt <math>B</math> ist der Aufpunkt von <math>h</math>. Also liegt er auf beiden Geraden und ist somit ihr Schnittpunkt.</p> <p><i>Aufwändigere Variante:</i></p> <p>Es ist das folgende Lineare Gleichungssystem zu lösen:</p> <p>I: <math>3 - 5r = -2 + 2s</math></p> <p>II: <math>1 + r = 2 + 4s</math></p> <p>III: <math>1 + 3r = 4 + 1s</math></p> <p>Mit der Gleichung (II) erhält man <math>r = 1 + 3s</math>. Dies in (III) eingesetzt liefert <math>s = 0</math>.</p> <p>Somit ist <math>r = 1</math> und der Schnittpunkt ist <math>B</math>.</p> <p><i>Hinweis: Die Probe in der dritten Gleichung erübrigt sich durch die Information des Aufgabentextes.</i></p>
<b>c)</b>	<p>Für <math>r = -1</math> erhält man den Punkt <math>C(8 0 -2)</math>. Dieser hat den gleichen Abstand von <math>A</math> wie <math>B</math>.</p>

**G3**

<b>Lösungsskizze</b>	
<b>a)</b>	<p>Aus der Parametergleichung erhält man die drei Gleichungen:</p> <p>I: <math>x_1 = 1 + 2s</math>                      II: <math>x_2 = -2r + s</math>                      III: <math>x_3 = r + 3s</math></p> <p>Setzt man dies in die Koordinatengleichung ein, so erhält man  <math>7r + 14s - 2r + 1s - 5r - 15s = 0r + 0s = 0</math></p> <p>Damit erfüllen alle Punkte von <math>E_1</math> die Koordinatengleichung.</p>
<b>b)</b>	<p><i>Es gibt unendlich viele mögliche Vektoren <math>\vec{v}</math>.</i></p> <p><i>Beispiel: <math>\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}</math>.</i></p> <p><i>Lösungsvariante 1:</i></p> <p><i>Es wird gezeigt, dass die Richtungsvektoren von <math>E_1</math> zusammen mit <math>\vec{v}</math> drei linear unabhängige Vektoren sind.</i></p> <p><i>Lösungsvariante 2:</i></p> <p><i>Es wird gezeigt, dass der allgemeine oder ein spezieller Ortsvektor von <math>E_2</math> kein Ortsvektor von <math>E_1</math> ist.</i></p> <p><i>Lösungsvariante 3:</i></p> <p><i>Es wird gezeigt, dass die Punkte oder ein spezieller Punkt von <math>E_2</math> nicht die Koordinatengleichung von <math>E_1</math> erfüllen.</i></p> <p><i>Weitere Lösungsvarianten sind möglich.</i></p> <p><i>Hinweis: <math>\vec{v}</math> darf nicht kollinear zum ersten Richtungsvektor sein. Ein Nachweis hierfür wird in der Lösung nicht erwartet.</i></p>



**G4**

Lösungsskizze	
<b>a)</b>	<p><math>\vec{r}</math> orthogonal zu <math>\vec{s}</math> :</p> <p>Es ist <math>\vec{r} \cdot \vec{s} = 15 - 7 - 8 = 0</math> . Damit ist <math>\vec{r}</math> orthogonal zu <math>\vec{s}</math> .</p> <p><math>\vec{r}</math> nicht orthogonal zu <math>\vec{t}</math> :</p> <p>Es ist <math>\vec{r} \cdot \vec{t} = 10 - 7 + 4 = 7 \neq 0</math> . Damit ist <math>\vec{r}</math> nicht orthogonal zu <math>\vec{t}</math> .</p>
<b>b)</b>	<p><math>\vec{u}_z</math> orthogonal zu <math>\vec{r}</math> :</p> <p>Es ist <math>-12 + 4 - 4z = 0 \Leftrightarrow -8 - 4z = 0 \Leftrightarrow z = -2</math> . Somit steht <math>\vec{u}_{-2}</math> orthogonal auf <math>\vec{r}</math> .</p> <p><math>\vec{u}_z</math> orthogonal zu <math>\vec{s}</math> :</p> <p>Es ist <math>-20 - 28 + 2z = 0 \Leftrightarrow -48 + 2z = 0 \Leftrightarrow z = 24</math> . Somit steht <math>\vec{u}_{24}</math> orthogonal auf <math>\vec{s}</math> .</p> <p>Da <math>\vec{u}_{-2}</math> und <math>\vec{u}_{24}</math> zwei unterschiedliche Vektoren sind, kann <math>\vec{u}_z</math> nicht gleichzeitig orthogonal zu <math>\vec{r}</math> und <math>\vec{s}</math> sein.</p>

**LA1**

Lösungsskizze	
<b>a)</b>	<p>Mit dem Gauß-Verfahren kommt man auf die folgende Stufenform:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 2 & -1 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc c} 2 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$ <p>Dies führt auf <math>\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}</math> .</p> <p><i>Anmerkung: Der „Lösungsvektor“ kann auch in anderer Schreibweise angegeben werden und es kann auch ein alternatives Lösungsverfahren angewandt werden.</i></p>
<b>b)</b>	<p>In der Auflösung nach dem Gauß-Verfahren entsteht z.B. die dritte Zeile <math>(3 + 2a)x_3 = 7</math> , was für <math>a = -1,5</math> zu einem Widerspruch führt.</p>

**LA2**

<b>Lösungsskizze</b>	
<b>a)</b>	<p>Es ist <math>A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 &amp; 1 \\ -1 &amp; 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+2 \\ 3+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Nach dem Assoziativgesetz ist <math>A^2 \cdot \vec{x} = A \cdot (A \cdot \vec{x})</math>.</p> $A^2 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+13 \\ 4+65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 69 \end{pmatrix}.$ <p><i>Hinweis: Der Bezug auf das Assoziativgesetz wird in der Darstellung der Lösung nicht erwartet.</i></p>
<b>b)</b>	<p>Es ist <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; 1 \\ -1 &amp; 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p+q \\ -p+5q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Aus der ersten Gleichung erhält man <math>q = 7 - 2p</math>. Eingesetzt in die zweite Gleichung erhält man <math>-11p = -33</math> bzw. <math>p = 3</math>. Also ist <math>q = 1</math>. Der Lösungsvektor ist damit <math>\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}</math>.</p> <p><i>Alternative Lösungen sind möglich.</i></p>

**LA3**

<b>Lösungsskizze</b>	
<b>a)</b>	<p>Es ist <math>M^2 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 2 \\ 0,5 &amp; 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 &amp; 2 \\ 0,5 &amp; 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0,5 &amp; 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0,5 \cdot 0 + 0 \cdot 0,5 &amp; 0,5 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix} = E</math>.</p> <p>Folglich ist <math>M^5 = M \cdot M^2 \cdot M^2 = M \cdot E \cdot E = M = \begin{pmatrix} 0 &amp; 2 \\ 0,5 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>.</p>
<b>b)</b>	<p>Es ist <math>A^2 = \begin{pmatrix} 0 &amp; x \\ f(x) &amp; 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 &amp; x \\ f(x) &amp; 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot f(x) &amp; 0 \\ 0 &amp; f(x) \cdot x \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Also muss <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> sein, der maximale Definitionsbereich ist <math>\mathbb{R} \setminus \{0\}</math>.</p>

**LA4**

Lösungsskizze	
<b>a)</b>	<pre> graph LR     E -- 0,6 --&gt; L     L -- 0,8 --&gt; K     K -- 0,2 --&gt; K     K -- 0,8 --&gt; E             </pre>
<b>b)</b>	<p>Es ist <math>a_{33} = 0 \cdot 8 + 0,8 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,04</math>.</p> <p>Der Wert <math>a_{33}</math> der Matrix <math>M^2 = A</math> gibt den Anteil der Insekten im Stadium <math>K</math> an, die nach zwei Entwicklungszyklen immer noch im Stadium <math>K</math> sind.</p>

**LA5**

Lösungsskizze	
<b>a)</b>	<pre> graph TD     R1 -- 2 --&gt; Z1     R1 -- 1 --&gt; Z2     R2 -- 3 --&gt; Z1     R2 -- 1 --&gt; Z2     R3 -- 4 --&gt; Z2     Z1 -- 1 --&gt; E     Z2 -- 1 --&gt; E             </pre>
<b>b)</b>	<p>Es ist <math>C = \begin{pmatrix} 2 &amp; 1 \\ 3 &amp; 0 \\ 0 &amp; 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Der Wert <math>c_{11} = 3</math> der Matrix <math>C</math> gibt die Menge des Rohstoffs <math>R_1</math> an, die für eine ME des Endprodukts benötigt wird.</p>

**LA6**

Lösungsskizze	
<b>a)</b>	
<b>b)</b>	<p>In der Hauptdiagonalen sind jeweils die Anteile derer, die bei ihrer vorigen Auswahl bleiben. Diese müssen sich mit den Anteilen derer, die ihre Auswahl ändern, zu 1 ergänzen, da die Gesamtzahl der Personen konstant ist.</p>

**S1**

Lösungsskizze	
<b>a)</b>	$  \begin{aligned}  P(E_1) &= P(\text{eine blaue Kugel}) + P(\text{alle rot}) \\  &= 3 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^2 \cdot \frac{4}{10} + \left(\frac{6}{10}\right)^3 \\  &= \frac{432}{1000} + \frac{216}{1000} \\  &= \frac{648}{1000} \left( = \frac{81}{125} \right)  \end{aligned}  $
<b>b)</b>	$  P(E_2) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^k \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^{10-k}  $

**S2**

<b>Lösungsskizze</b>	
<b>a)</b>	Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Variablen $X$ , denn ihr Maximum liegt bei dem Erwartungswert $E(X) = 10 \cdot 0,4 = 4$ .
<b>b)</b>	<p>Es ist <math>P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,4^k \cdot 0,6^{10-k}</math> und</p> $P(Y = 10 - k) = \binom{10}{10-k} \cdot 0,6^{10-k} \cdot 0,4^{10-(10-k)} = \binom{10}{10-k} \cdot 0,6^{10-k} \cdot 0,4^k.$ <p>Also bleibt zu zeigen <math>\binom{10}{k} = \binom{10}{10-k}</math>. Es ist <math>\binom{10}{k} = \frac{10!}{k!(10-k)!} = \binom{10}{10-k}</math>.</p> <p>Damit ist <math>P(X = k) = P(Y = 10 - k)</math>.</p>

**S3**

<b>Lösungsskizze</b>	
	$E(X) = 0 \cdot 0,32 + 1 \cdot 0,36 + 2 \cdot 0,32 = 1$ $\sigma^2(X) = 0,32 \cdot 1^2 + 0,36 \cdot 0^2 + 0,32 \cdot 1^2 = 0,64$ $\sigma(X) = \sqrt{0,64} = 0,8$

**S4**

<b>Lösungsskizze</b>	
<b>a)</b>	$0,8 \cdot 0,375 = 0,30$ . Also sind 30% der Reisenden männlich und 60+. Da insgesamt 70% der Reisenden 60+ sind, sind 40% der Reisenden weiblich und 60+.
<b>b)</b>	Der Anteil der weiblichen Reisenden ist $100\% - 37,5\% = 62,5\%$ , das sind 25% mehr weibliche als männliche Reisende. Wenn diese 25% einer Anzahl von 10 Personen entsprechen, besteht die gesamte Reisegruppe aus 40 Personen.