Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Musteraufgaben für einen hilfsmittelfreien Prüfungsteil

erhöhtes Anforderungsniveau

Impressum

Herausgeber:

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus

Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern

Niedersächsisches Kultusministerium

Sächsisches Staatsministerium für Kultus und Sport

Ministerium für Bildung und Kultur Schleswig-Holstein

Das vorliegende Material wurde von einer Arbeitsgruppe mit Vertretern aus den Ländern Bayern, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig-Holstein erarbeitet.

Für die Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg:

Leiter des MINT-Referats: Werner Renz

Redaktion: Manfred Bergunde und Xenia Rendtel

korrigierte Fassung April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Musteraufgaben für Aufgabenpool 1

Analysis

A1_1

EH S. 17

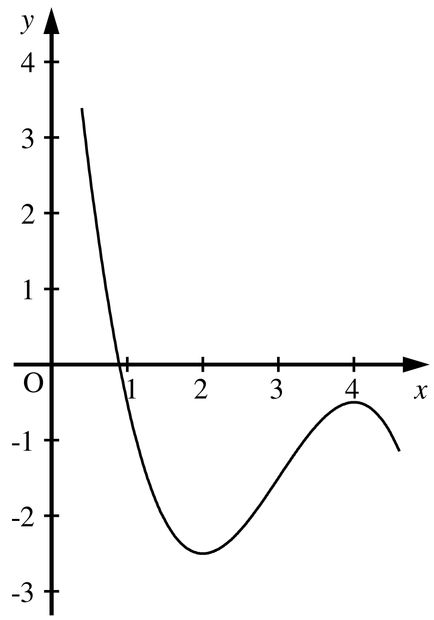
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *f* mit
$f(x) = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $0 = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5$ nur genau eine Lösung hat.

2 BE

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von *f*.

3 BE



A1_2

EH S. 17

Das Rechteck $ABCD$ mit $A(1|0)$, $B(4|0)$, $C(4|2)$ und $D(1|2)$ wird durch den Graphen der Funktion *f* mit $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$ in zwei Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

5 BE

1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

1.2.1 Analytische Geometrie

G1_1 *EH S. 18*

Gegeben sind die Ebene $E:\ 2\cdot x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3|0|2)$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt *P* nicht in der Ebene *E* liegt. 1 BE

b) Spiegelt man den Punkt *P* an der Ebene *E*, so erhält man den Punkt *P´*.
Ermitteln Sie die Koordinaten von *P´*. 4 BE

G1_2 *EH S. 18*

Gegeben ist das Viereck *ABCD* mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(-3|1|4)$, $C(2|-4|4)$ und $D(5|-5|0)$.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist. 3 BE

b) Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ an. 2 BE

Lineare Algebra

LA1_1 *EH S. 19*

Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Es gelte $\overrightarrow{v_{i+1}} = A\cdot\overrightarrow{v_i}$ mit $i \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\overrightarrow{v_2}$. 2 BE

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit den kleinstmöglichen Werten $x, y, z \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ so, dass $A\cdot\vec{w} = \vec{w}$ gilt. 3 BE

LA1_2 *EH S. 20*

Betrachtet werden die Matrizen A und B mit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ sowie eine Matrix C.

a) Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist. 2 BE

b) Für die Matrix C gilt:

$C\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $C\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Begründen Sie, dass gilt: $C\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. 2 BE

1.3 Stochastik

S1_1

EH S. 20

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

a) Geben Sie an, welche der Abbildungen die Verteilung von X darstellt.
Begründen Sie Ihre Auswahl. 3 BE

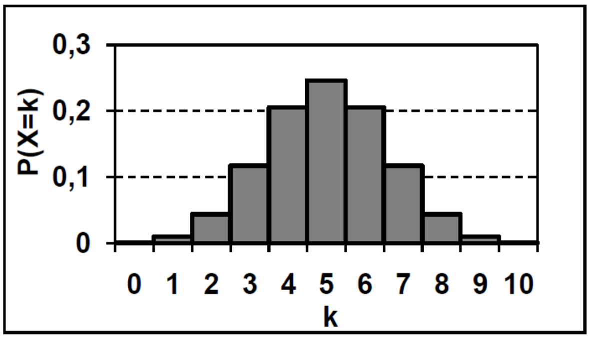


Abbildung 1

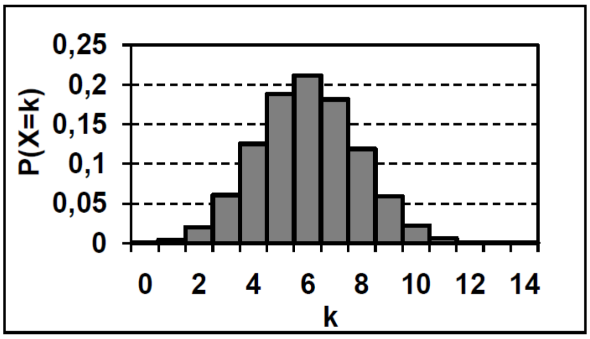


Abbildung 2

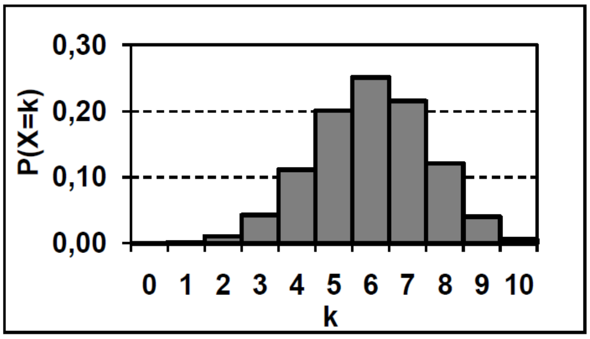


Abbildung 3

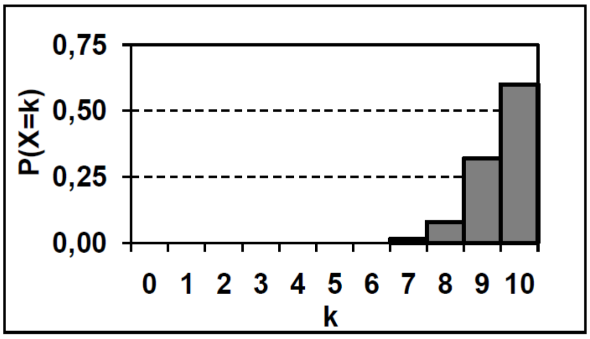


Abbildung 4

b) Geben Sie mithilfe der von Ihnen ausgewählten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(4 < X < 7)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \neq 5)$ an. 2 BE

S1_2

EH S. 21

In den Urnen U_1 und U_2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U_1: 6 rote und 4 blaue Kugeln

U_2: 1 rote und 4 blaue Kugeln

a) Aus der Urne U_1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. 2 BE

b) Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U_1 stammt. 3 BE

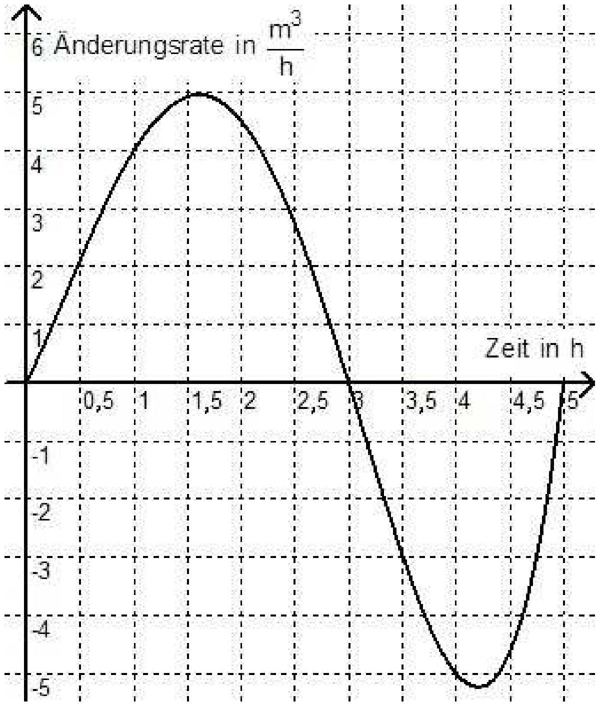
2 Musteraufgaben für Aufgabenpool 2

2.1 Analysis

A2_1 *EH S. 21*

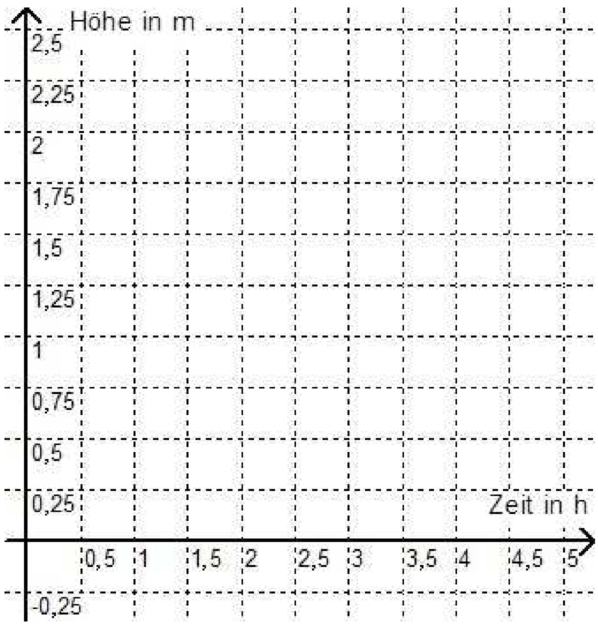
Ein quaderförmiges Speicherbecken für eine Flüssigkeit hat eine Grundfläche von $5\,\text{m}^2$ und ist zunächst leer.

Der nebenstehende Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate $\left(\text{in } \frac{\text{m}^3}{\text{h}}\right)$ der Flüssigkeit über einen Zeitraum von 5 Stunden wieder.



a) Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit. 2 BE

b) Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem einen möglichen Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstandes im Speicherbecken in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreibt. 3 BE



A2_2 *EH S. 22*

Für jeden Wert für a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \mathrm{e}^{a \cdot x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Zeigen Sie, dass die Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt $P_a\left(1 \middle| f_a(1)\right)$ durch die Gleichung $t_a(x) = 2 \cdot a \cdot e^a \cdot x + e^a \cdot (1 - 2 \cdot a)$ beschrieben werden kann. 5 BE

2.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

2.2.1 Analytische Geometrie

G2_1 *EH S. 22*

Im Raum sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden g liegt, gegeben.

Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweier Punkte B und C der Geraden g, die zusammen mit A ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden. 5 BE

G2_2 *EH S. 22*

Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit
$E_1\colon\ 6\cdot x_1 - x_2 - 4\cdot x_3 = 12$ und $E_2\colon\ -3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = -6$.
Die Punkte $A(2|0|0)$ und $B(0|0|-3)$ liegen in beiden Ebenen.

a) Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind. 1 BE

b) Ermitteln Sie die Koordinaten eines von A und B verschiedenen Punktes, der ebenfalls in beiden Ebenen liegt. 2 BE

c) In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass eine Gleichung der Ebene E_1 entsteht.

Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Antwort. 2 BE

2.2.2 Lineare Algebra

LA2_1 *EH S. 23*

Es gibt 2×2-Matrizen, die besondere Eigenschaften bezüglich ihrer Quadrate besitzen.

a) Für jeden Wert für t $(t\in\mathbb{R}, t\neq 0)$ ist eine Matrix M_t durch $M_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Ermitteln Sie, welche besondere Eigenschaft die Matrizen M_t bezüglich ihrer Quadrate M_t^2 haben. 2 BE

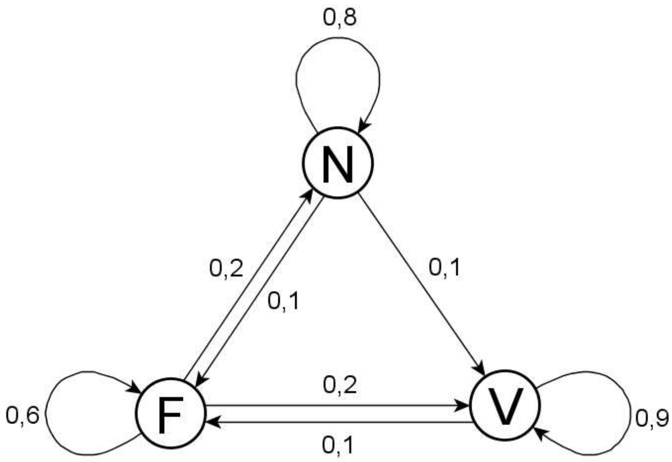
b) Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $(a, b, c, d\in\mathbb{R})$ und $b\cdot c\neq 0$ gilt $A^2 = b\cdot c\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie, welche Werte für die Elemente der Matrix A in Frage kommen. 3 BE

LA2_2 *EH S. 23*

Die Nutzer einer Kantine werden hinsichtlich der Auswahl eines Menüs in drei Gruppen eingeteilt:

Esser des Nudelgerichts (N), Esser des Fleischgerichts (F) und Esser des vegetarischen Gerichts (V). Der abgebildete Graph gibt modellhaft die Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag an. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Nutzer der Kantine konstant bleibt.



a) Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \square & 0{,}1 & \square \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$ fehlenden Werte an.

2 BE

b) Bestimmen Sie den Wert a_{22} der Matrix $M^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. 1 BE

c) Interpretieren Sie die Bedeutung der zweiten Zeile der Matrix M^2 im Sachzusammenhang.

2 BE

2.3 Stochastik

S2_1

EH S. 24

Verteilungen von Zufallsgrößen werden durch Parameter charakterisiert.

a) In den Klassen 10a und 10b, die jeweils aus 25 Schülern bestehen, wurden die Leistungen jedes Schülers im Weitsprung ermittelt. Die Zufallsgrößen A und B ordnen jeweils einem zufällig ausgewählten Schüler der Klasse 10a bzw. 10b seine Sprungweite in Meter zu. Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsgrößen gilt $E(A) = E(B)$, für die Standardabweichungen $\sigma(A) < \sigma(B)$.

Erklären Sie anschaulich, was diese beiden Beziehungen für die Verteilungen der Sprungweiten bedeuten. 2 BE

b) Eine Zufallsgröße X kann fünf unterschiedliche Werte annehmen.

Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X so an, dass der Erwartungswert zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Wert dieser Zufallsgröße liegt. 3 BE

S2_2

EH S. 24

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen“ fällt, beträgt p.

a) Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an:

A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen“.

B: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen“, darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal. 3 BE

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Würfen dreimal „Wappen“ fällt, ist 0,216.

Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen“ wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl“. 2 BE

3 Weitere Übungsaufgaben

Die nachfolgenden Aufgaben sind *keine* verabschiedeten Arbeitsergebnisse der länderübergreifenden Arbeitsgruppe. Sie wurden von der Hamburger Redaktion zusätzlich zu den Musteraufgaben zur Verfügung gestellt.

Übungsaufgaben für Pool 1

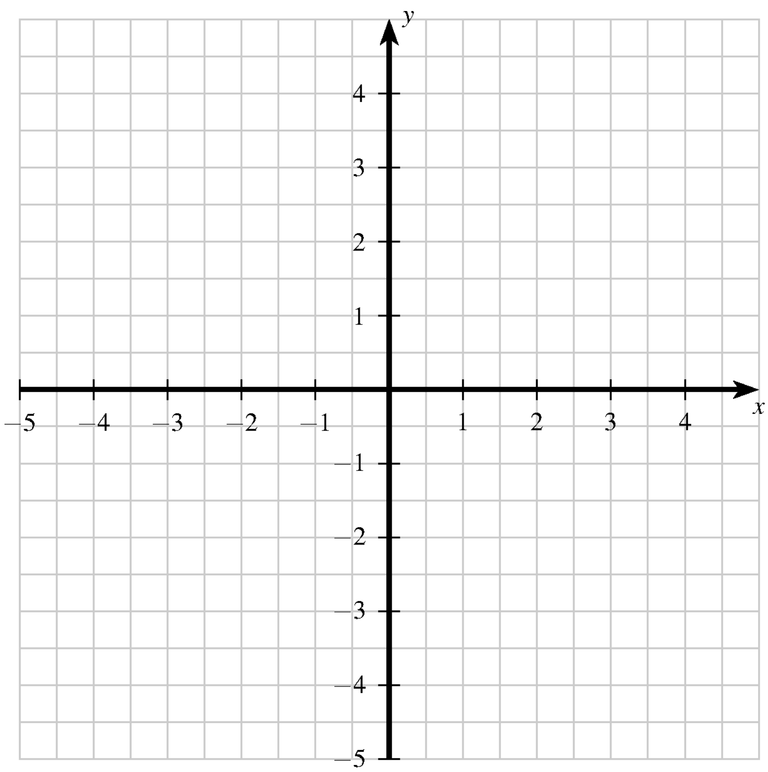
Analysis

Ü: A1_1 *EH S. 25*

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. 1 BE

b) Zeichnen Sie die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse sowie den Scheitelpunkt ein und skizzieren Sie den groben Verlauf des Funktionsgraphen. 2 BE



c) Geben Sie den Bereich der Funktion an, in dem der Wert des Integrals über die Funktion f maximal ist, und begründen Sie Ihre Angabe. 2 BE

Analytische Geometrie

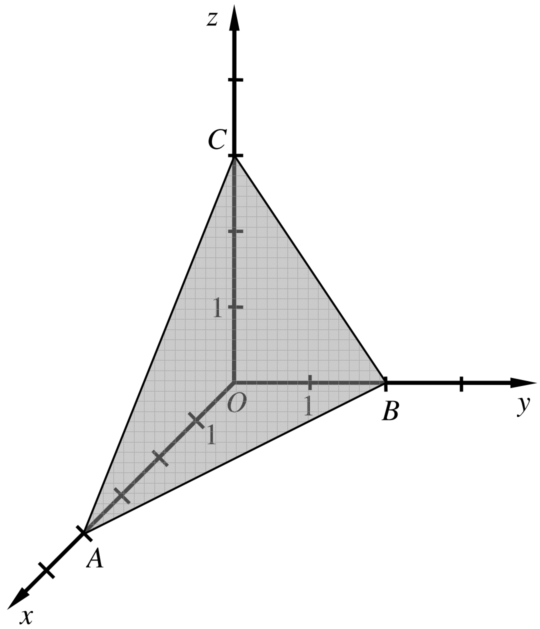
Ü: G1_1 *EH S. 25*

In der Abbildung ist ein Teil der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C eindeutig bestimmt ist, in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

Die Punkte A, B und C liegen auf den Koordinatenachsen und besitzen jeweils ganzzahlige Koordinaten.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E und weisen Sie nach, dass der Punkt $P(6\,|\,-1\,|\,0)$ in der Ebene E liegt.

5 BE



Ü: G1_2 *EH S. 26*

Gegeben ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S. In einem kartesischen Koordinatensystem haben die Eckpunkte die Koordinaten $A(5|1|3)$, $B(9|4|3)$, $C(8|-3|3)$ und $S(1|5|-1)$.

a) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABC ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck ist. 3 BE

b) Geben Sie die spezielle Lage der Grundfläche ABC im Koordinatensystem sowie die Höhe h der Pyramide an. 2 BE

Ü: G1_3 *EH S. 27*

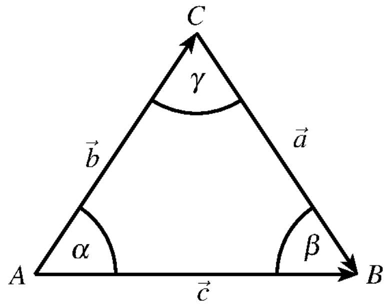
Gegeben sind die Punkte $A(1|2|4)$, $B(0|1|5)$, $C(3|-2|5)$ und $\mathrm{P}(3|k^2|k)$.

a) Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. 2 BE

b) Bestimmen Sie einen Wert für k so, dass der Punkt P auf einer Geraden liegt, die durch die Punkte A und B verläuft. 3 BE

Ü: G1_4 *EH S. 27*

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(6|2|-4)$, B und C sowie mit den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\\z+4\end{pmatrix}$ $(z\in\mathbb{R})$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\8\\6\end{pmatrix}$ und $\vec{c}$.



a) Geben Sie den Wert für den Parameter z so an, dass $\gamma = 90^\circ$ ist. 2 BE

b) Der Punkt P sei gegeben durch die Bedingung $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\cdot\vec{c}$.
Begründen Sie, warum P im Inneren des Dreiecks ABC liegt. 3 BE

Lineare Algebra

Ü: LA1_1 *EH S. 28*

Gegeben ist das eindeutig lösbare Gleichungssystem LGS1

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{I:} & 3x_1-2x_2+2x_3 &=& 10\\ \text{II:} & 6x_1+2x_2-4x_3 &=& 6\\ \text{III:} & 4x_2-8x_3 &=& -12\end{array}\right\}\text{LGS1}\;.$$

a) Berechnen Sie den Lösungsvektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ von LGS1. 3 BE

b) Begründen Sie, warum die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems LGS1 eine echte Teilmenge von der Lösungsmenge des nachfolgenden Gleichungssystems LGS2 ist.

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{I:} & 3x_1-2x_2+2x_3 &=& 10\\ \text{II:} & 6x_1+2x_2-4x_3 &=& 6\\ \text{III:} & 12x_1+4x_2-8x_3 &=& 12\end{array}\right\}\text{LGS2}$$ 2 BE

Stochastik

Ü: S1_1 *EH S. 28*

Eine Urne enthält genau zehn Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden.

Fünf der Kugeln sind rot, drei weiß und zwei gelb.

a) Es werden genau drei Kugeln nacheinander mit Zurücklegen zufällig gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man keine gelbe Kugel erhält. 2 BE

b) Nun werden genau zwei Kugeln ohne Zurücklegen zufällig gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. 3 BE

Ü: S1_2 *EH S. 29*

Über eine Zufallsgröße X liegen widersprüchliche Wahrscheinlichkeitsaussagen vor. Einigen Aussagen zufolge müsste die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Abbildung 1 entsprechen, anderen Aussagen zufolge der Abbildung 2.

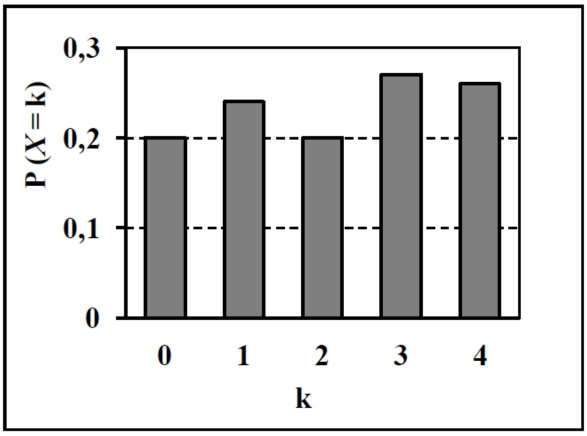


Abbildung 1

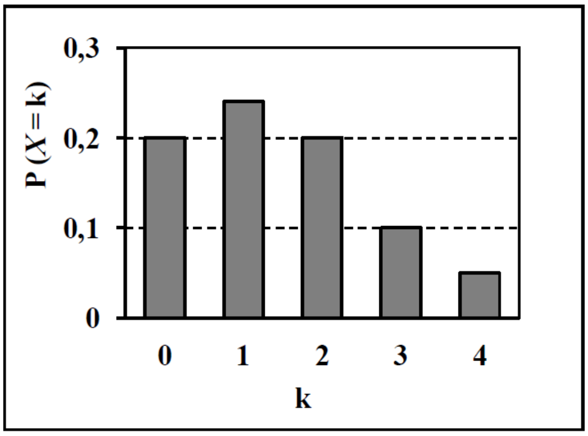


Abbildung 2

a) Begründen Sie, warum keine der beiden Abbildungen die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X wiedergeben kann. 2 BE

b) Eine gründliche Neuuntersuchung der Zufallsgröße X liefert folgende Erkenntnisse:
- $P(X=0)=0,20$; $P(X=1)=0,24$; $P(X=2)=0,20$.
- Die Zufallsvariable X kann ganzzahlige Werte von 0 bis 4 annehmen;
- Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X beträgt 1,94.

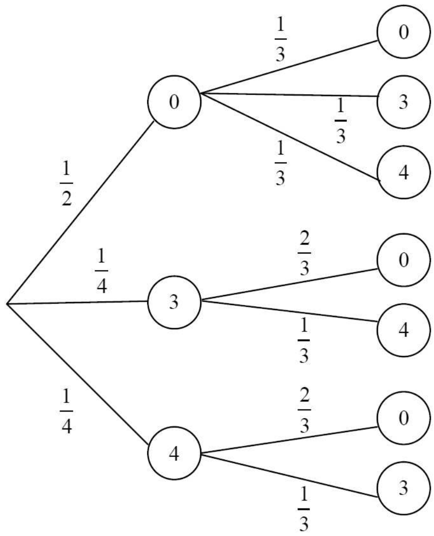
Bestimmen Sie $P(X=3)$ und $P(X=4)$. 3 BE

Ü: S1_3 *EH S. 30*

In einer Urne befinden sich vier Kugeln, die mit Zahlen beschriftet sind. Es wird zweimal nacheinander eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Das Baumdiagramm zeigt die möglichen Ergebnisse mit den Wahrscheinlichkeiten der Zweige.

Die zweimalige Ziehung werde benutzt, um nacheinander die Koordinaten x_1 und x_2 eines Punktes $A(x_1 | x_2)$ durch Ablesen der Zahl auf der gezogenen Kugel zu bestimmen.

Berechnen Sie den Erwartungswert für den Betrag des Ortsvektors von A. 5 BE



Übungsaufgaben für Pool 2

Analysis

Ü: A2_1 *EH S. 30*

Betrachtet werden Funktionen, deren Graph jeweils punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

a) Geben Sie die Gleichung einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f an, deren Graph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

Berechnen Sie $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ für die von Ihnen gewählte Funktion. 2 BE

b) Der Graph einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f sei punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

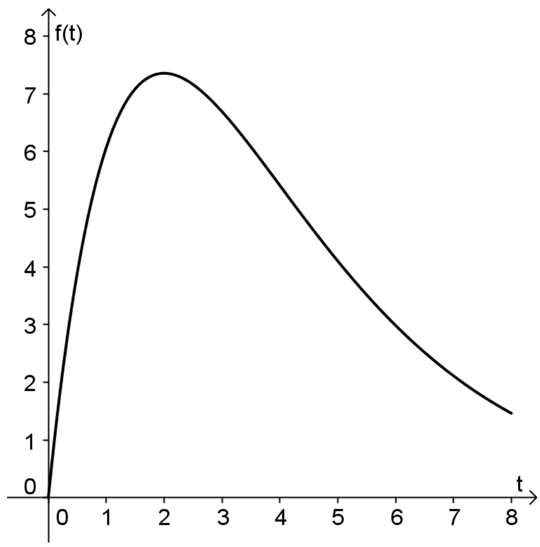
Begründen Sie allgemein, dass dann für alle $a > 0$ gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. 3 BE

Ü: A2_2 *EH S. 31*

Nach Einnahme eines Medikamentes wird dessen Konzentration im Blut des Patienten gemessen. Für die ersten 8 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit t.

a) Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung die Gleichung $f'(t) = (10 - 5t) \cdot e^{-0,5t}$ gilt. 2 BE

b) Die Funktion f hat im Intervall $t \in [0;8]$ ein globales Maximum (siehe Abbildung). Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die maximale Konzentration im Blut gemessen wird. 3 BE



Analytische Geometrie

Ü: G2_1 *EH S. 31*

Gegeben sind die Punkte $A(6|2|-4)$ und $K(2|0|-1)$.

a) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und der Punkt K ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B. 2 BE

b) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes C an, sodass $\overrightarrow{AC}$ orthogonal zu $\overrightarrow{AK}$ ist. 1 BE

c) Die Punkte A, B und C bestimmen im Raum eine Ebene E, deren Koordinatengleichung bekannt sei. Eine Gerade g verläuft durch die Punkte P und Q, diese Punkte P und Q liegen außerhalb der Ebene E und seien ebenfalls bekannt.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur rechnerischen Überprüfung, ob ein Durchstoßpunkt der Geraden g durch die Ebene E existiert. 2 BE

Lineare Algebra

Ü: LA2_1 *EH S. 32*

Ein Zoologisches Institut hält eine Käfer-Art unter künstlichen Bedingungen in einem abgeschlossenen Schaukasten. Die Käfer-Art durchläuft drei Entwicklungsstadien: Eier (E), Larven (L) und Käfer (K).

Die Übergangsmatrix für einen Entwicklungszyklus von drei Wochen ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix} \text{, bezogen auf Populationsvektoren } \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix}.$$

Darin bedeutet e die durchschnittliche Anzahl der Eier, die pro Käfer in einem Entwicklungszyklus gelegt werden.

Das Institut möchte die Population möglichst konstant halten. Es kann über Beleuchtung und Temperatur die Anzahl e beeinflussen.

Bestimmen Sie die Anzahl e so, dass es möglich ist, eine Käfer-Population einzurichten, die sich in Zusammensetzung und Gesamtzahl in jedem Zyklus reproduziert.

5 BE

Stochastik

Ü: S2_1 *EH S. 33*

Über die Studierenden einer Seminargruppe sind folgende Informationen bekannt:

- 60 % der Studierenden sind Männer.
- Die Hälfte der Studierenden ist höchstens 1,75 m groß.
- Von den Studierenden, die höchstens 1,75 m groß sind, sind 60 % Frauen.

a) Ermitteln Sie den Anteil der Männer in dieser Seminargruppe, die größer als 1,75 m sind und den Anteil der Frauen in dieser Seminargruppe, die größer als 1,75 m sind. 3 BE

b) Eine Studentin wächst etwas und wechselt von der Gruppe derer, die höchstens 1,75 m groß sind, in die Gruppe derer, die über 1,75 m groß sind. Dadurch sinkt der Anteil der Frauen unter den Studierenden, die höchstens 1,75 m groß sind, auf $58\frac{1}{3}\,\%$.

Bestimmen Sie die Anzahl der Studierenden, die nun noch höchstens 1,75 m groß sind. 2 BE

4 Erwartungshorizonte

A1_1

	Lösungsskizze
a)	In der dargestellten Abbildung sieht man eine Nullstelle. Anhand des Graphen erkennt man, dass die Funktion f zwei Extrempunkte besitzt. Diese liegen unterhalb der x-Achse. Da eine Funktion 3ten Grades nur höchstens zwei Extrempunkte besitzt, werden außerhalb des hier dargestellten Bereiches keine weiteren Extrema liegen. Somit wird für $x \to -\infty$ die Funktion immer größer und für $x \to \infty$ immer kleiner. Deshalb wird es keine weitere Nullstelle geben.
b)	Es ist $f''(x) = -3x + 9$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. $f(3) = -1{,}5$. Der Wendepunkt ist $W\left(3 \middle\vert -1{,}5\right)$.

A1_2

	Lösungsskizze
	Das Rechteck $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von $3 \cdot 2 = 6$ FE. Unterhalb des Graphen von f liegt eine Fläche von $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ FE Also liegt eine Fläche von $6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$ FE oberhalb des Graphen. Damit ist das Verhältnis der beiden Teilflächen $7:2$ (oder umgekehrt)

G1_1

	Lösungsskizze
a)	Punktprobe: $2\cdot(-3)+0-2-4=-12\neq 0$, damit liegt P nicht in E.
b)	Lotgerade zu E durch P: z. B. $\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$ Einsetzen des allgemeinen Geradenpunktes in die Ebenengleichung ergibt den Parameter des Lotfußpunktes: $2\cdot(-3+2\lambda)+\lambda-(2-\lambda)-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=2$ P' liegt auf der Lotgeraden und hat den doppelten Parameter-Wert : $\overrightarrow{OP'}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ Koordinaten von P': $P'(5\mid 4\mid -2)$

G1_2

	Lösungsskizze
a)	*Mögliche Lösung:* Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel sind. Deshalb ist der Nachweis erbracht, wenn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ gilt: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}$ Ein Viereck ist genau dann kein Rechteck, wenn es zwei benachbarte Seiten hat, die nicht orthogonal zueinander sind. Deshalb ist der Nachweis erbracht, wenn $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$ gilt: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}=-15-5+0=-20\neq 0$ *Alternative Lösungswege sind möglich.*

b)	Es ist $\overrightarrow{x_M} = \overrightarrow{x_A} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ Und somit sind die Koordinaten des Mittelpunktes: $M\left(1\middle\|-2\middle\|2\right)$ Für den Radius des Kreises gilt $r = \left\|\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$ Der Kreis hat den Radius 3 LE.

LA1_1

	Lösungsskizze
a)	Es ist $\overrightarrow{v_1} = A\cdot\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix}40\\ \frac{3}{2}\\ \frac{1}{10}\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = A\cdot\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}30\\ \frac{1}{20}\\ 4\end{pmatrix}$
b)	$\begin{pmatrix}0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{10} & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ führt auf die Gleichungen I) $20\cdot y = x$ II) $\frac{1}{2}\cdot z = y$ III) $\frac{1}{10}\cdot x = z$ I) in III) eingesetzt liefert $2\cdot y = z$. Dies in II) eingesetzt liefert eine wahre Aussage, sodass das Gleichungssystem unterbestimmt ist. Die kleinste der drei Komponenten ist *y*. Setzt man nun $y = 1$, so ist $z = 2$ und $x = 20$. Dies ist die Lösung mit den kleinsten positiven natürlichen Zahlen.

LA1_2

	Lösungsskizze
a)	Es ist $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-1)+2\cdot 3 & 5\cdot 2+2\cdot(-5) \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 3 & 3\cdot 2+1\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und somit sind A und B zueinander invers. *Hinweis: Auch die Multiplikation in umgekehrter Reihenfolge ist möglich.*
b)	*Mögliche Lösung:* Es sei $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Es gelten die folgenden Bedingungen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Aus der ersten Bedingung folgt $a = 4$ und $c = 2$. Aus der zweiten Bedingung folgt $b = 2$ und $d = 3$. Somit bleibt zu zeigen $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Es ist $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. *Alternative Lösungswege sind möglich, z.B. Zerlegung des Vektors in eine Summe und Anwendung des Distributivgesetzes.*

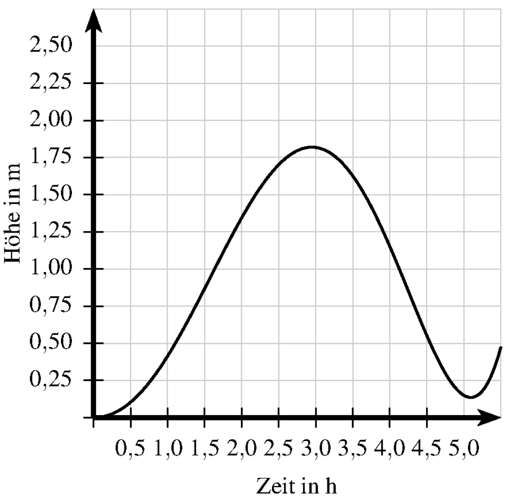
S1_1

	Lösungsskizze
a)	Auswahl: Abbildung 3 *Mögliche Begründung:* Abbildung 2 ist auszuschließen, da hier $n = 14$ gewählt ist. In Abbildung 1 ist $p = 0{,}5$ zu erkennen und in Abbildung 4 erkennt man, dass p knapp unter 1 liegt. *Alternative Begründungen sind möglich.*
b)	Durch Ablesen ergibt sich: (Wird eine andere Abbildung unter a) gewählt, sind andere Werte als richtig zu bewerten) $P(4 < X < 7) = P(5) + P(6) = 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45$ $P(X \neq 5) = 1 - P(5) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

S1_2

	Lösungsskizze
a)	$P(rr)+P(bb)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{15}$ Die Wahrscheinlichkeit für zwei gleiche Farben beträgt $\frac{7}{15}$.
b)	*Mögliche Lösung:* $P(U_1\|r)=\frac{P(U_1\cap r)}{P(r)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{3}{4}$ Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel aus Urne U_1 stammt, beträgt $\frac{3}{4}$. *Alternative Lösungswege, z.B. mit Baumdiagramm oder Vierfeldertafel, sind möglich.*

A2_1

	Lösungsskizze
a)	Die Fläche unterhalb des Graphen beschreibt das Volumen. Durch Kästchenzählen erhält man ein Volumen zwischen $7\ m^3$ und $10\ m^3$
b)	Skizze des Graphen:  Dabei sind die folgenden Punkte des Graphen wesentlich: Verlauf durch $(0\|0)$; alle Punkte im ersten Quadranten Maximum an der Stelle 3 Minimum an der Stelle 5, dort Funktionswert größer 0

A2_2

	Lösungsskizze
	Es gelten die beiden Bedingungen $t_a(x)=f'(1)\cdot x+b$ und $t_a(1)=f_a(1)$. Es ist $f_a'(x)=2axe^{a\cdot x^2}$ und damit $t_a(1)=2ae^a+b=e^a$, somit ergibt sich für b: $b=e^a-2ae^a=e^a(1-2a)$. Damit lautet die Tangentengleichung $t_a(x)=2ae^a\cdot x+e^a\cdot(1-2a)$. *Alternative über den direkten Einsatz in die Tangentengleichung ist möglich.*

G2_1

	Lösungsskizze
	Mögliche Beschreibung: AC sei die Hypotenuse des Dreiecks. Man fälle von A das Lot auf die Gerade g. Der Lotfußpunkt ist Punkt B. Nun soll an B ein geeignetes Vielfaches $\lambda_C\cdot\vec{u}$ des Richtungsvektors von g angelegt werden. Man berechne den Abstand $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ und erhält einen möglichen Wert für λ_C aus der Bedingung $\left\|\lambda_C\cdot\vec{u}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Dann ergibt sich C aus $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\lambda_C\cdot\vec{u}$. *Andere Beschreibungen sind möglich.* *Insbesondere ist es auch möglich, BC als Hypotenuse zu wählen und die Punkte B und C durch Anlegen der Vielfachen $\lambda_C\cdot\vec{u}$ und $-\lambda_C\cdot\vec{u}$ an den Lotfußpunkt zu finden..*

G2_2

	Lösungsskizze
a)	*Mögliche Begründung:* *Es wird ein Punkt angegeben, der in einer der Ebenen liegt und nicht in der anderen, z.B.* $P(0\|-12\|0)$. *Alternative Begründung:* *Es wird nachgewiesen, dass die Normalenvektoren nicht kollinear sind.* *Weitere Alternativen sind möglich.*

b)	*Mögliche Lösung:* Die Punkte A und B liegen in beiden Ebenen, folglich liegt auch die Gerade AB in beiden Ebenen. Ein möglicher Punkt C ergibt sich z.B. aus $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$; $C(-2\|0\|-6)$. *Alternative Lösungen sind möglich.*
c)	Änderung: Der Koeffizient 5 ist in 0,5 umzuwandeln. *Mögliche Begründung:* Multipliziert man die geänderte Koordinatengleichung für E_2 mit –2, dann ergibt sich die Koordinatengleichung für E_1. *Alternative Begründungen sind möglich.*

LA2_1

	Lösungsskizze
a)	Es ist $M_t^{\,2} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Man erkennt, dass die Quadrate aller Matrizen von M_t unabhängig von t sind und die Einheitsmatrix ergeben.
b)	Es ist $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = bc \begin{pmatrix} a^2/bc+1 & (a+d)/c \\ (a+d)/b & 1+d^2/bc \end{pmatrix}$ Damit ist $a=0$ und $d=0$; b und c sind beliebig ungleich 0.

LA2_2

	Lösungsskizze
a)	Es ist $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.
b)	Es ist $a_{22} = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0 = 0{,}83$.
c)	An einem beliebigen Tag setzen sich die Nutzer der Kantine aus Essern des Fleischgerichts, des vegetarischen Gerichts und des Nudelgerichts zusammen. Mit dieser Zusammensetzung liefert die zweite Zeile der Matrix M^2 die Anzahl der Nutzer, die zwei Tage später das vegetarische Gericht auswählen.

S2_1

	Lösungsskizze
a)	*Erklärung sinngemäß:* Der Durchschnitt der Sprungweiten der Schüler der Klasse 10a stimmt mit dem der Schüler der Klasse 10b überein. Die Sprungweiten der Schüler der Klasse 10a streuen weniger als die der Schüler der Klasse 10b.
b)	Angabe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung z. B.: x_i: –10 | 1 | 2 | 3 | 4 $P(X=x_i)$: 0,6 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 Hinweis: Eine BE wird vergeben, wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt.

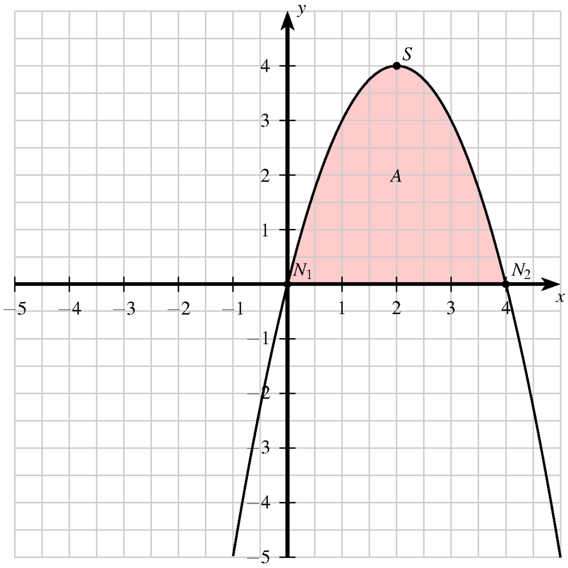
Tabelle zu b):

x_i	–10	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1

S2_2

	Lösungsskizze
a)	Wahrscheinlichkeit für Ereignis *A*: $P(A)=\binom{5}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^2$ Wahrscheinlichkeit für Ereignis *B*: $P(B)=p^2\cdot\binom{3}{1}\cdot p\cdot(1-p)^2$
b)	*Untersuchungsergebnis:* Das Ergebnis “Wappen” ist wahrscheinlicher. *Mögliche Begründung:* $0{,}216>0{,}5^3$.

Ü: A1_1

	Lösungsskizze
a)	Es ist $-(x-2)^2+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=4 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$. Damit sind $x_1=0$ und $x_2=4$ die gesuchten Nullstellen.
b)	Der Graph der quadratischen Funktion ist eine nach unten geöffnete Normalparabel, deren Scheitelpunkt bei $S(2\,\|\,4)$ liegt. 
c)	Oberhalb der x-Achse ist das Integral positiv. Somit ist der Wert des Integrals maximal zwischen den Nullstellen 0 und 4, da nur hier positive Funktionswerte vorliegen.

Ü: G1_1

	Lösungsskizze
	Mögliche Lösung: Die Ebene E kann in der Form $E: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Dabei entnimmt man der Abbildung $E: \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow E: 3x+6y+4z=12$. *Alternative Lösung:* Eine Wahl von A als Aufpunkt sowie $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren führt auf die Darstellungsform $E: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$, wobei $r,s \in \mathbb{R}$. *Weitere Alternativen sind möglich.*

	Fortsetzung mit der Koordinatengleichung: Einsetzen von P in E liefert $3\cdot 6+6\cdot(-1)+4\cdot 0=12$. Somit liegt der Punkt in der Ebene. *Alternativ kann der allgemeine Ortsvektor der Ebene mit dem Ortsvektor von P gleichgesetzt und die Widerspruchfreiheit des LGS gezeigt werden.* *Anmerkung: Falls keine Ebenendarstellung gefunden wurde, kann der Nachweis für P auch erbracht werden, indem gezeigt wird, dass P auf der Geraden durch A und B liegt.*

Ü: G1_2

	Lösungsskizze
a)	Nachweis der Gleichschenkligkeit: Es ist zu zeigen, dass zwei Seiten gleich lang sind. Dabei ergibt sich $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$, $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$ und $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. Da $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ ist das Dreieck gleichschenklig. Nachweis der Rechtwinkligkeit: Es ist $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}=0$, also liegt bei A ein rechter Winkel. *Hinweis: Zum Nachweis der Rechtwinkligkeit kann natürlich auch der Satz des Pythagoras verwendet werden.*
b)	Die Grundfläche ABC ist parallel zur x-y-Ebene mit dem Abstand 3. Damit hat die Pyramide eine Höhe von $h=3-(-1)=4$

Ü: G1_3

	Lösungsskizze
a)	Es ist $g(AB): \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Bleibt zu zeigen, dass $C \notin g$ ist. Es ergibt sich somit das folgende Lineare Gleichungssystem: $(I) \quad 1 - r = 3$ $(II) \quad 2 - r = -2$ $(III) \quad 4 + r = 5$ Aus (I) erhält man $r = -2$, (II) führt zu $r = 4$. Dies ist bereits ein Widerspruch, und somit liegt C nicht auf g. *Alternative Lösungen sind möglich.*
b)	Mit der Geradengleichung aus a) ergibt sich das folgende Lineare Gleichungssystem: $(I) \quad 1 - r = 3$ $(II) \quad 2 - r = k^2$ $(III) \quad 4 + r = k$ Aus (I) ergibt sich $r = -2$. Setzt man dies in die anderen beiden Gleichungen ein, so erhält man $(II^*) \quad 4 = k^2$ $(III^*) \quad 2 = k$ Somit ist $k = 2$.

Ü: G1_4

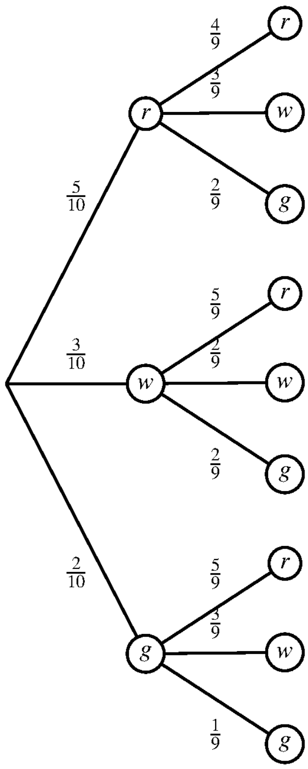
	Lösungsskizze
a)	Es ist die Bedingung zu erfüllen, dass $\vec{a} \cdot (-\vec{b}) = 0$, also $4 + 32 - 6z - 24 = 0$ und damit ist $z = 2$.
b)	Der Vektor $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$ ist Ortsvektor eines Punktes auf der Dreiecksseite $\overline{AB}$. Eine Addition von $\frac{1}{2} \cdot \vec{c}$ ergäbe den Ortsvektor eines Punktes auf der Dreiecksseite $\overline{BC}$. Da nur $\frac{1}{4} \cdot \vec{c}$ addiert wird, ergibt sich der Ortsvektor eines Punktes im Inneren des Dreiecks.

Ü: LA1_1

	Lösungsskizze
a)	Mit dem Gauß-Verfahren, kommt man auf die folgende Stufenform: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 6 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & -12 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Dies führt auf $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Anmerkung: Der „Lösungsvektor" kann auch in anderer Schreibweise angegeben werden und es kann auch ein alternatives Lösungsverfahren angewandt werden.*
b)	In LGS2 ist die dritte Zeile eine Verdoppelung der zweiten, also ist LGS2 unterbestimmt. Da der Lösungsvektor von LGS1 jedenfalls die ersten beiden Zeilen von LGS2 erfüllt und die dritte Zeile in LGS2 überflüssig ist, ist der Lösungsvektor von LGS1 in der Lösungsmenge von LGS2 enthalten.

Ü: S1_1

	Lösungsskizze
a)	Keine gelbe Kugel zu ziehen, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{10}$. Damit ist $P\left(\left\{\overline{g}\,\overline{g}\,\overline{g}\right\}\right) = \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{512}{1000}\left(= \frac{64}{125} = 0{,}512\right)$

b)	Das zugehörige Baumdiagramm:  Damit ergibt sich $P(\{rr, ww, gg\}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{20+6+2}{90} = \frac{28}{90} \left(= \frac{14}{45} \right)$

Ü: S1_2

	Lösungsskizze
a)	Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist in Abbildung 1 größer, in Abbildung 2 kleiner als 1.
b)	$P(\mathrm{X}=3)+P(\mathrm{X}=4)=0{,}36$ $E(\mathrm{X})=0\cdot 0{,}20+1\cdot 0{,}24+2\cdot 0{,}20+3\cdot P(\mathrm{X}=3)+4\cdot P(\mathrm{X}=4)=1{,}94$ daraus folgt $P(\mathrm{X}=3)=0{,}14$ und $P(\mathrm{X}=4)=0{,}22$.

Ü: S1_3

Lösungsskizze
Für den Ortsvektor von A und seinen Betrag gibt es folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_1	x_2	$\left\lvert\overrightarrow{OA}\right\rvert$	Wahrscheinlichkeit
0	0	0	$\frac{1}{6}$
0	3	3	$\frac{1}{6}$
0	4	4	$\frac{1}{6}$
3	0	3	$\frac{1}{6}$
3	4	5	$\frac{1}{12}$
4	0	4	$\frac{1}{6}$
4	3	5	$\frac{1}{12}$

Der Erwartungswert von $\left\lvert\overrightarrow{OA}\right\rvert$ ist

$$E\left(\left\lvert\overrightarrow{OA}\right\rvert\right)=0\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{12}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{12}=\frac{14}{6}+\frac{10}{12}=\frac{19}{6}$$

Ü: A2_1

	Lösungsskizze
a)	Es sind alle ungeraden Funktionen möglich. Die einfachste Funktion ist z.B. $f(x)=x$. Dann ist $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2} x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2=0$
b)	*Begründung sinngemäß:* Der Graph von f schließt mit der x-Achse und den Geraden $x=-a$ und $x=a$ Flächenstücke ein. Je zwei dieser Flächenstücke sind wegen der Punktsymmetrie inhaltsgleich, gehen jedoch in die Berechnung des Integrals mit unterschiedlichen Vorzeichen ein.

Ü: A2_2

	Lösungsskizze
a)	$f'(t) = 10 \cdot e^{-0,5t} + 10t \cdot (-0,5)e^{-0,5t} = (10-5t) \cdot e^{-0,5t}$
b)	Die höchste Konzentration im Blut ist an der Stelle, an der der Graph der Funktion *f* mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ einen Hochpunkt hat. Es muss also gelten: $f'(t) = 0$. $(10-5t)e^{-0,5t} = 0 \quad \vert : e^{-0,5t} \quad (e^{-0,5t} \neq 0)$. $10 - 5t = 0$ $t = 2$ Nach 2 Stunden ist die höchste Konzentration im Blut erreicht. (Der Aufgabenstellung ist zu entnehmen, dass dieses das Maximum ist.)

Ü: G2_1

	Lösungsskizze
a)	*Mögliche Lösung:* $\overrightarrow{AB} = 4 \cdot \overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$, daraus ergeben sich die Koordinaten des Punktes *B*: $B(-10 \vert -6 \vert 8)$.
b)	*Mögliche Lösung:* Ein zu $\overrightarrow{AK}$ orthogonaler Vektor ist beispielsweise der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $C(7 \vert 0 \vert -4)$. *Hinweis: Der Lösungsweg braucht nicht aufgeschrieben zu werden. Es gibt unendlich viele Lösungen, entscheidend ist, dass* $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ *erfüllt ist.*

c)	*Mögliche Lösung:* Man berechne den Verbindungsvektor von P und Q und prüfe mit Hilfe des Skalarproduktes, ob er orthogonal zum Normalenvektor der Ebene ist. Es gibt genau dann einen Durchstoßpunkt, wenn die beiden Vektoren nicht orthogonal sind. *Alternative Lösung:* Man bestimme eine Parameterdarstellung von $g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$. Aus dieser lese man die parameterabhängigen Koordinaten der Geradenpunkte ab, setze sie in die Koordinatengleichung der Ebene ein und löse nach λ auf. Es gibt genau dann einen Durchstoßpunkt, wenn λ eindeutig bestimmt ist.

Ü: LA2_1

Lösungsskizze
Das LGS zu der Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ darf nicht eindeutig bestimmt sein, da sonst der Nullvektor der einzige Lösungsvektor wäre. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc\|c} -1 & 0 & e & 0 \\ 0,3 & -0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \end{array}\right)$ Eine mögliche Auflösung führt auf eine Stufenform mit der Zeile $(6e - 24) \cdot x_K = 0$. Daraus folgt, dass $e = 4$ sein muss.

Ü: S2_1

	Lösungsskizze
a)	*Möglicher Lösungsweg:* Ansatz: <table><tr><td></td><td>M</td><td>F</td><td>Summe</td></tr><tr><td>≤ 1,75m</td><td></td><td>0,50·0,60</td><td>0,50</td></tr><tr><td>> 1,75m</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Summe</td><td>0,60</td><td></td><td>1</td></tr></table> Ausfüllen mit Hilfe der Randwerte: <table><tr><td></td><td>M</td><td>F</td><td>Summe</td></tr><tr><td>≤ 1,75m</td><td>0,20</td><td>0,30</td><td>0,50</td></tr><tr><td>> 1,75m</td><td>0,40</td><td>0,10</td><td>(0,50)</td></tr><tr><td>Summe</td><td>0,60</td><td>(0,40)</td><td>1</td></tr></table> Der Anteil der Männer, die größer als 1,75 m sind, ist 40 %, der Anteil der Frauen, die größer als 1,75 m sind, ist 10 %. *Anmerkung: Von den eingeklammerten Werten wird nur einer benötigt.* *Andere Lösungswege sind möglich.*
b)	*Möglicher Lösungsweg:* $\frac{60}{100}\cdot(N+1)-1=\frac{58\frac{1}{3}}{100}\cdot N \Leftrightarrow 1\tfrac{2}{3}N=40 \Leftrightarrow N=24$ In der Gruppe derer, die höchstens 1,75 m groß sind, sind nun noch 24 Studierende.