Aufgabe II.1: Trainingsforschung (50 P)

Schwerpunktthema: Analysis 1

In einem sportmedizinischen Forschungsprojekt werden Wirkungsweisen verschiedenen Trainingsverhaltens untersucht. Einer der Probanden, Ralf Renner, trainiert auf einer Marathonstrecke von 42,195 km. Mithilfe eines GPS-Empfängers werden während der Trainingsläufe Zeitpunkte und zugehörige Geschwindigkeiten ermittelt.
Wie es bei einem Marathonlauf üblich ist, läuft auch Ralf Renner bereits vor der Startlinie los, obwohl die Weg- und Zeitmessung erst an der Startlinie beginnt. Dieser Vorlauf ist in den folgenden Darstellungen nicht erfasst.
Im Herbst 2014 wird ein Trainingslauf über 162 min, also 2,7 h aufgezeichnet. Die Abhängigkeit der Laufgeschwindigkeit v (in km/h) von der Laufzeit t (in Stunden) lässt sich modellhaft beschreiben durch eine Funktion v mit:

$$v(t) \quad = \frac{2}{25}t^4 - \frac{1}{3}t^2 + 15{,}6 \quad \text{mit } t \in [0;2{,}7]$$

Der zugehörige Funktionsgraph ist in Abbildung 1 in der Anlage dargestellt und gestrichelt fortgesetzt.

a) • Geben Sie die Anfangsgeschwindigkeit an, mit der Ralf Renner über die Startlinie läuft.

• Beschreiben Sie mithilfe des Graphen (siehe Abbildung 1 in der Anlage) die Funktion v im Intervall $[0{,}6;2{,}2]$ im Sachkontext.

• Begründen Sie, dass die Funktion v nur auf einem Teil ihres mathematisch möglichen Definitionsbereichs einem realen Lauf gerecht werden kann. D. h. die oben vorgenommene Einschränkung $t \in [0;2{,}7]$ ist sinnvoll. **(8 P)**

b) • Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem Ralf Renners Geschwindigkeit am stärksten abnimmt.

• Geben Sie die Bedeutung der ersten Ableitung von v im Sachkontext der Aufgabe an. **(8 P)**

Die Abhängigkeit der zurückgelegten Strecke von der Zeit wird durch eine Stammfunktion von v beschrieben.

c) • Geben Sie alle Stammfunktionen von v an.

• Geben Sie diejenige Stammfunktion von v an, die die zum Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke angibt. Begründen Sie Ihre Auswahl.

• Bestätigen Sie, dass Ralf Renner innerhalb der aufgezeichneten 2,7 h das Ziel erreicht. **(8 P)**

(Sollten Sie keine Stammfunktion ermittelt haben, nutzen Sie das Ersatzergebnis $V(t) = \frac{1}{60}t^5 - \frac{1}{12}t^3 + 15{,}4t$.)

Mit dem typischen Laufverhalten von Ralf Renner kann man das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm durch Funktionsgleichungen folgender Form darstellen:

$$v_a(t) \quad = \tfrac{2}{25}t^4 - \tfrac{1}{3}t^2 + a \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Dabei steht t für die Zeit in Stunden und $v_a(t)$ für die Geschwindigkeit zur Zeit t in km/h.

d) • Bestimmen Sie a so, dass Ralf Renner das Marathonziel in zweieinhalb Stunden erreichen würde.

• Interpretieren Sie den Einfluss des Parameters a im Sachkontext.

• Begründen Sie im Sachkontext, dass v_a nicht für alle anzunehmenden Werte von a eine realistische Geschwindigkeitscharakteristik modelliert. **(8 P)**

Nach dem ersten Lauf trainiert Ralf Renner mit zwei Zielsetzungen:

1. Die Marathonstrecke von 42,195 km soll innerhalb einer Laufzeit von 2,5 h geschafft werden.
2. Innerhalb der Marathonstrecke soll seine Laufgeschwindigkeit nicht ab-, sondern eher zunehmen.

Im April 2015 gelingt Ralf Renner ein Lauf, bei dem sich die Laufgeschwindigkeit mit folgender Funktion v_{neu} modellieren lässt (siehe Abbildung 1 in der Anlage):

$$v_{neu}(t) \quad = \tfrac{1}{4}t \cdot \sin(\tfrac{\pi}{4}t) + 16{,}3 \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

Dabei steht t für die Zeit in Stunden und $v_{neu}(t)$ für die Geschwindigkeit zur Zeit t in km/h.

e) Weisen Sie nach, dass $V_{neu}(t) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - \frac{1}{\pi}t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 16{,}3t$ eine Stammfunktion von v_{neu} ist. **(5 P)**

f) • Zeigen Sie, dass Ralf Renner innerhalb von 2,5 h Laufzeit zwar eine größere Strecke als beim ersten Lauf, aber noch nicht die gewünschte Marathonstrecke geschafft hat.

• Zeigen Sie, dass Ralf Renner zum Zeitpunkt $t = 2{,}55$ h die Marathonstrecke geschafft hat, seine Geschwindigkeit aber immer noch größer ist als seine Anfangsgeschwindigkeit. **(5 P)**

Im Zuge des Forschungsprojektes wird angedacht, Ralf Renners Leistung durch Einnahme von Nahrungsergänzungsmitteln zu steigern. So führt beispielsweise die Einnahme einer bestimmten Menge Koffeins zu einer Leistungssteigerung. Die Leistung des Läufers lässt sich mit der Funktion p beschreiben:

$$p(t) = -0{,}5t^3 + 2t^2 \quad \text{mit } t \in [0;4]$$

Dabei beschreibt t die Zeit in Stunden nach der Einnahme des Koffeins und $p(t)$ den Zahlenwert der Leistung. Die Wirkung während eines Zeitraums ist das Integral über der Leistung innerhalb dieses Zeitraums.

g) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_k, zu dem Renner das koffeinhaltige Getränk einnehmen müsste, damit er während des gesamten zweieinhalbstündigen Laufs von der Wirkung maximal profitieren kann.

(8 P)

Anlage zur Aufgabe „Trainingsforschung“

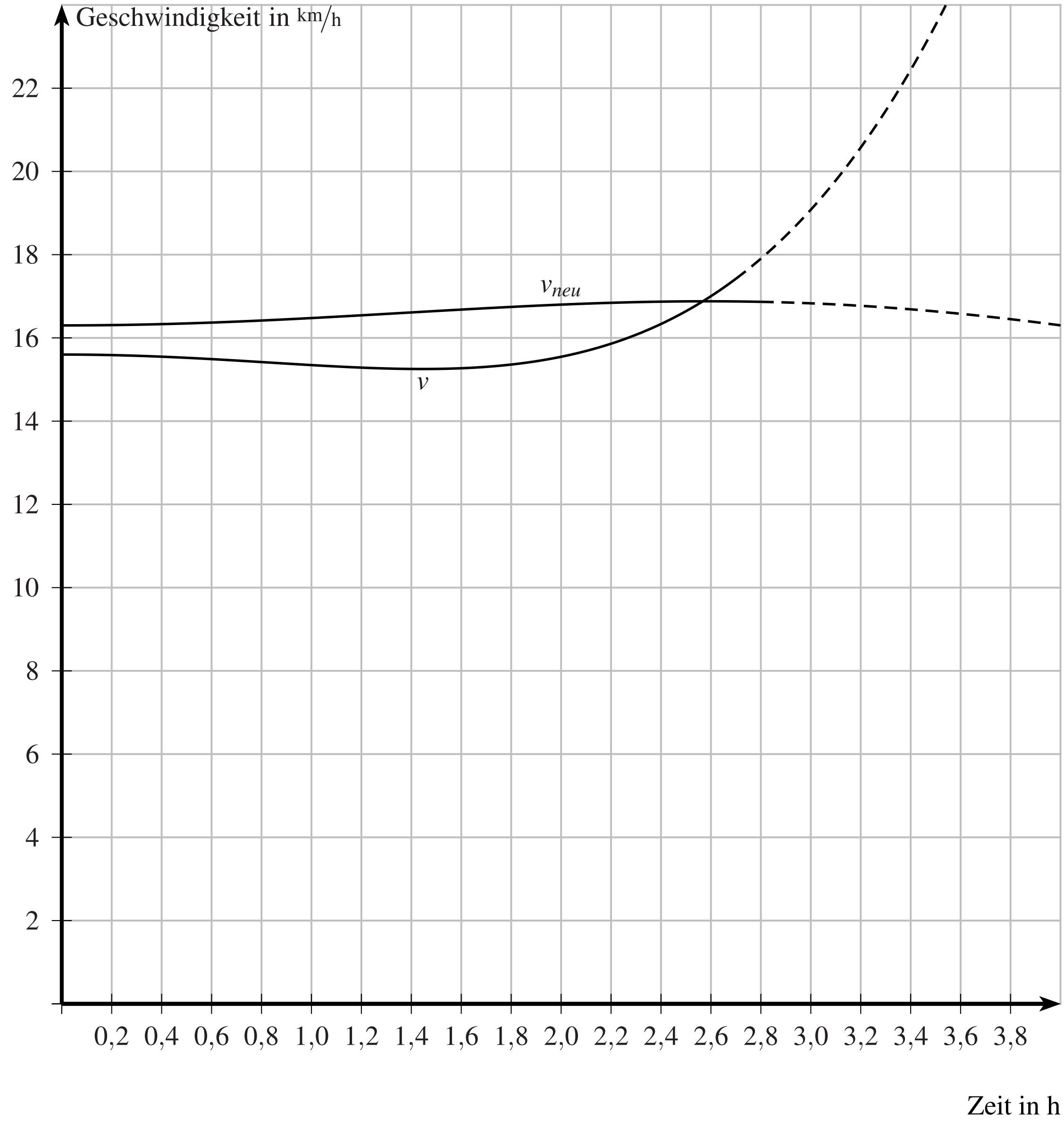

Abb. 1: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

Aufgabe II.2: X-15 (50 P)

Schwerpunktthema: Analysis 2

Vor dem Beginn der bemannten Raumfahrt wurde in den USA ein raketengetriebenes Experimentalflugzeug entwickelt, das die Erdatmosphäre hinter sich lassen und beim Wiedereintritt extreme Geschwindigkeiten aushalten konnte. Dieses Flugzeug bekam die Bezeichnung X-15. In den Jahren 1959 bis 1966 wurden mit ihm etwa 200 Flüge unternommen. Die Flugbahn bei einem typischen Testflug lässt sich durch eine Funktion h mit folgender Gleichung wiedergeben:

Abbildung X-15

$$h(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}00005 \cdot x^2}, \quad x \geq 0$$

Vereinfachend wird angenommen, dass die Flugbahn in einer Ebene liegt. Die Variable x bedeutet dann die horizontale Entfernung des Flugzeugs vom Startpunkt des Fluges und $h(x)$ ist die Höhe des Flugzeuges über dem Boden. Sowohl x als auch $h(x)$ werden in Kilometern gemessen (siehe Abbildung 1 in der Anlage).

a) Beschreiben Sie markante Eigenschaften des Graphen von h. **(5 P)**

In einer Flughöhe von 500 m musste der Pilot über dem Zielflughafen sein und unmittelbar die Landung vorbereiten.

b) Bestätigen Sie, dass die Entfernung des Zielflughafens vom Startpunkt 402 km betragen durfte. **(3 P)**

c)
- Weisen Sie nach, dass $h'(x) = \left(0{,}02x - 10^{-6}x^3\right) \cdot e^{-0{,}00005 \cdot x^2}$ gilt.
- Bestimmen Sie rechnerisch den horizontalen Abstand x_G vom Startpunkt, in dem die maximale Höhe dieses Fluges erreicht wurde, und den Wert für diese Höhe. **(8 P)**

Der Raketenantrieb arbeitete nur für einige Minuten. Noch während des Steigflugs waren die Tanks erschöpft und der Antrieb wurde abgeschaltet. Dieses Ereignis heißt *Brennschluss*; es fand in 36 km Höhe statt.

d)
- Ermitteln Sie hierfür die horizontale Entfernung vom Startpunkt des Fluges näherungsweise mit einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle.
- Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn beim Brennschluss. **(6 P)**

Für den Anfangsbereich der Bahnkurve des Flugzeugs kann die durch h angegebene Bahnkurve näherungsweise durch den Parabelanteil von h modelliert werden:

$$h_{par}(x) \quad = \frac{1}{100}x^2$$

e) • Bestätigen Sie, dass die Abweichung der Flughöhe bei Verwendung von h_{par} in der horizontalen Entfernung $x = 25$ gegenüber der durch $h(25)$ bestimmten Flughöhe unter 0,2 km liegt.

• Bestimmen Sie die Entfernung, ab der die Flughöhe durch diese Parabelnäherung um mehr als 5 % über der tatsächlichen Flughöhe liegt. **(7 P)**

Der Modellierung der Bahnkurve durch die Funktion h liegen einige Modellannahmen zugrunde.
Andere Modellannahmen würden für einen Teil der Flugbahn zu einer neuen Parabelnäherung durch eine quadratische Funktion p führen.
In der folgenden Teilaufgabe soll diese neue Näherung für $100 \leq x \leq 200$ untersucht werden.
Die Funktion p soll in ungefährer Übereinstimmung mit h an der Stelle $x = 100$ den Funktionswert 60 und die lokale Steigung 0,6 haben, wogegen ihr höchster Punkt etwas tiefer als das Maximum von h liegen soll, nämlich in einer Höhe von 72 km.

f) • Leiten Sie aus diesen Angaben die Funktionsgleichung von p her.
(Zur Kontrolle: Es ist $p(x) = -0{,}0075x^2 + 2{,}1x - 75$.)

• Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes der zu p gehörigen Parabel.

• Zeichnen Sie den zu p gehörigen Parabelbogen in das beigefügte Koordinatensystem (siehe Abbildung 1 in der Anlage) ein. **(12 P)**

Nun wird wieder die Modellierung mit der Funktion h betrachtet. Die Funktion h ist eine spezielle Funktion der Art:

$$h_{a,b}(x) \quad = a \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}00005 \cdot b \cdot x^2} \quad (a, b \in \mathbb{R}^+)$$

g) • Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters b mit $b > 0$ auf den Verlauf der Flugbahn.

• Untersuchen Sie qualitativ, wie sich die Lagen der wesentlichen Punkte (Gipfelpunkt, mögliche Lage des Zielflughafens) auf der Flugbahn verändern würden, wenn sich der Parameter a verdoppelte.

(7 P)

In den letzten 60 Sekunden vor dem Aufsetzen auf der Landebahn folgt die Geschwindigkeit v der X-15 in etwa der Funktion mit der Gleichung $v(t) = \frac{1}{200}t^2 - 2t + 210$. Die Geschwindigkeit ist dabei in Metern pro Sekunde gemessen, die Zeit t in Sekunden, es gilt $0 \leq t \leq 60$.

h) Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke in den letzten 60 Sekunden des Fluges. **(2 P)**

Anlage zur Aufgabe „X-15“

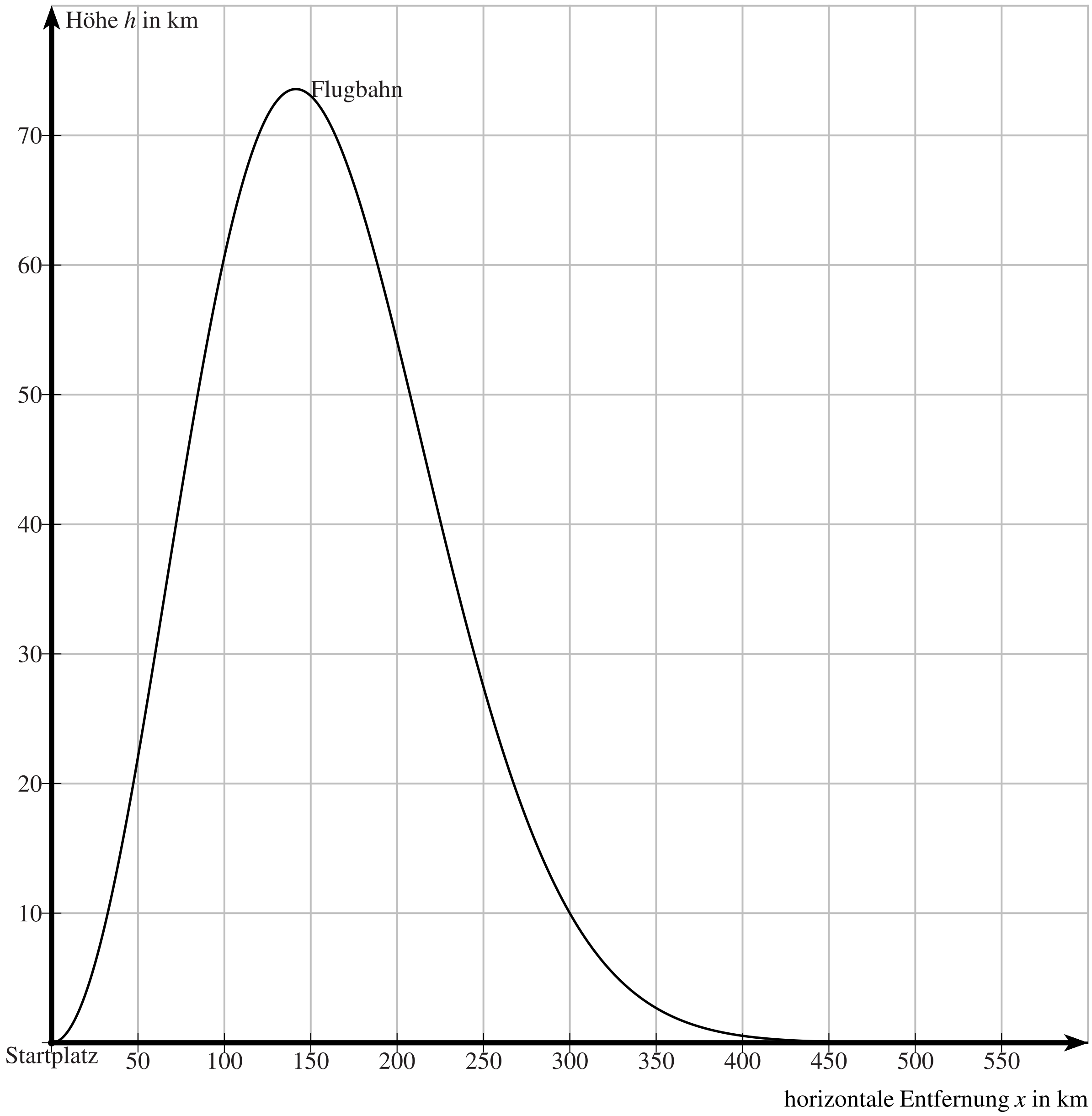

Abb. 1: Der Graph der Funktion h

Aufgabe III: Gemüsekiste (50 P)

Schwerpunktthema: Lineare Algebra

In einer Region gibt es zwei Anbieter von Gemüsekisten, die ihren Kunden wöchentlich eine Kiste mit frischem Gemüse liefern. Der erste Anbieter liefert seinen Kunden die Kiste „Alles frisch" (Kiste A). Der zweite Anbieter versorgt seine Kunden mit der „Biokiste" (Kiste B).
Marktbeobachtungen zeigen, dass von Monat zu Monat einige Kunden die Gemüsekiste wechseln:

Abbildung
Gemüsekiste

- 10 % der „Alles frisch"-Kunden lassen sich im nächsten Monat die „Biokiste" vom zweiten Anbieter liefern.
- Von den Kunden, welche die Kiste B beziehen, wechselt monatlich ein Viertel zum ersten Anbieter, um die Kiste A zu erhalten.

Zur Beschreibung in einem Modell wird die Verteilung der Kunden auf die beiden angebotenen Gemüsekisten durch einen Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei a_n und b_n jeweils den Anteil der Kunden angeben, der sich im Monat n nach Beobachtungsbeginn Gemüsekiste A bzw. B liefern lässt.
Es wird vereinfacht angenommen, dass die Gesamtzahl der Kunden im Laufe der Zeit konstant bleibt.
Im Rahmen des Modells gilt für den Übergang von einer Verteilung zur Verteilung im nächsten Monat $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$ mit einer Matrix M der Form:

$$M = \begin{pmatrix} c & 1-d \\ 1-c & d \end{pmatrix}$$

a)
- Beschreiben Sie die Bedeutung der Parameter c und d im Sachzusammenhang der Aufgabenstellung.
- Bestätigen Sie, dass für die Parameter $c = 0{,}9$ und $d = 0{,}75$ gelten muss.
- Erstellen Sie einen Übergangsgraphen, der das Wechselverhalten der Kunden beschreibt. **(7 P)**

Im Mai ($n = 0$) beziehen 60 % der Kunden die Kiste A. Die übrigen 40 % lassen sich die Kiste B vom zweiten Anbieter liefern. Der Anbieter der Kiste B beobachtet das Wechselverhalten der Kunden mit Sorge. Er befürchtet, dass er demnächst weniger als ein Drittel der gesamten Kunden beliefern wird.

b)
- Berechnen Sie mithilfe des Modells die Kundenverteilung für die Monate Juni bis August.
- Geben Sie an, in welchem Monat sich erstmalig weniger als ein Drittel der Kunden Kiste B liefern lässt. **(6 P)**

Der zweite Anbieter überlegt, durch eine Werbemaßnahme seine Biokiste attraktiver für die Kunden zu machen. Er möchte dadurch das Wechselverhalten der Kunden so beeinflussen, dass er langfristig mit einem stabilen Kundenanteil von 40 % rechnen kann.

c)
- Untersuchen Sie, wie die Matrix-Einträge c und d voneinander abhängen müssen, damit ein einmal erreichter Anteil von 40 % für Kiste B erhalten bleibt.
- Durch die Werbemaßnahme wird erreicht, dass $d = 0{,}8$ ist.

  Ermitteln Sie den Wert für c, sodass die vom Anbieter der Kiste B gewünschte Kundenverteilung erhalten bleibt. **(8 P)**

Nach erfolgreicher Werbemaßnahme des Anbieters der Kiste B beziehen im März des Folgejahres wieder 60 % der Kunden die Kiste A und 40 % die Kiste B.
Zur weiteren Stabilisierung seines Marktanteils entscheidet sich der Anbieter der Kiste B, sein Angebot zu erweitern. Ab April bietet er zusätzlich zur Kiste B die Lieferung einer Rohkost-Kiste (Kiste R) an. Nach Einführung der Kiste R zeichnet sich folgender Trend ab für das monatliche Wechselverhalten:

von / zu	A	B	R
A	90 %	15 %	15 %
B	5 %	70 %	35 %
R	5 %	15 %	50 %

Für weitere Modellrechnungen wird daher die Matrix $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}7 & 0{,}35 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ verwendet.

d)
- Bestätigen Sie, dass der zweite Anbieter im April insgesamt 40 % der Kunden beliefert.
- Zeigen Sie, dass – trotz wechselnder Verteilung der Kunden – der Anbieter von Kiste A langfristig einen festen Kundenanteil von 60 % hat.
- Die Potenzen P^n der Matrix P nähern sich für große n einer Matrix G an.

  Entscheiden Sie begründet, welche der folgenden drei Matrizen die korrekte Grenzmatrix G (mit gerundeten Werten) ist:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}60 & 0{,}60 \\ 0{,}44 & 0{,}44 & 0{,}44 \\ 0{,}26 & 0{,}26 & 0{,}26 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}60 & 0{,}60 \\ 0{,}26 & 0{,}26 & 0{,}26 \\ 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}14 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}26 & 0{,}26 \\ 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}14 \\ 0{,}60 & 0{,}60 & 0{,}60 \end{pmatrix}$$

(13 P)

Um seinen Bedarf zu planen, möchte der zweite Anbieter wissen, wie viele Kunden in Zukunft Kiste *B* bzw. Kiste *R* bestellen werden. Für genauere Aussagen über diese Kundenanteile werden im Folgenden Eigenvektoren der Matrix *P* betrachtet. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ lautet $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 39 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix}$.

e) • Der Vektor $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls ein Eigenvektor der Matrix *P*.

Bestätigen Sie, dass der zugehörige Eigenwert $\lambda_2 = 0{,}35$ ist.

• Man kann die Anfangsverteilung der Kunden mithilfe der Eigenvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ darstellen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \vec{e_1} + t \cdot \vec{e_2}$$

Bestimmen Sie die Werte für s und t. **(7 P)**

(Zur Kontrolle: $s = \frac{1}{65}$, $t = \frac{9}{65}$)

f) • Weisen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus Teilaufgabe e) nach, dass man den Anteil der Kunden, die im Monat n die Kiste *R* bestellen, mit der folgenden Formel berechnen kann:

$$r_n = \frac{9}{65} \cdot (1 - 0{,}35^n)$$

(Hinweis: Für den Nachweis kann folgende allgemeine Beziehung genutzt werden: Ist $\vec{e}$ ein Eigenvektor einer Matrix M mit dem Eigenwert λ, so gilt $M^n \cdot \vec{e} = \lambda^n \cdot \vec{e}$.)

• Interpretieren Sie die nachgewiesene Formel in Hinblick auf die Entwicklung der Kundenanteile von Kiste *R* und Kiste *B*. **(9 P)**

Aufgabe IV: Schraubenfabrik (50 P)

Schwerpunktthema: Stochastik

Eine Fabrik stellt Schrauben her. Der dafür benutzte Maschinentyp Z_1 produziert 1,2 % Ausschuss.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, unter 10 zufällig herausgegriffenen Schrauben, die von einer Z_1-Maschine hergestellt wurden,

- keine,
- mindestens eine,
- höchstens zwei

unbrauchbare Schraube(n) zu finden. **(6 P)**

Abbildung von Schrauben

In der Fabrik arbeiten weitere Maschinen eines zweiten und dritten Typs (Z_2 und Z_3), die die gleichen Schrauben wie Z_1 herstellen. Sie sind zwar langsamer als die vom Typ Z_1, arbeiten dafür aber genauer. Für den Typ Z_2 beträgt der Ausschuss nur 0,8 % und für den Typ Z_3 nur 0,6 %. Da Z_2 und Z_3 langsamer sind, stellen die Maschinen Z_2 nur 30 % und die Maschinen Z_3 nur 25 % der gesamten Schraubenproduktion her.
Um eine ausgewogene Qualität sicherzustellen, werden die Schrauben vor dem Verpacken gemäß ihrer Produktionsanteile gemischt.

b) Bestätigen Sie, dass bei dieser Art der Schraubenmischung ein Ausschussanteil von 0,93 % entsteht. **(6 P)**

Eine Auszubildende bemerkt:

> „Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus der Gesamtproduktion herausgegriffene unbrauchbare Schraube von einer Maschine des Typs Z_3 produziert worden ist, müsste überschlagsweise etwa 0,16 sein.“

c) Beurteilen Sie die Aussage dieser Auszubildenden. **(7 P)**

Eines Tages beschwert sich ein Kunde, dass in einer Lieferung zu viele fehlerhafte Schrauben gewesen seien.
Die Schraubenfabrik möchte ausschließen, dass ihr Lagerbestand einen zu hohen Ausschussanteil enthält und plant deswegen einen Hypothesentest. Es sollen 1500 Schrauben untersucht werden, die Nullhypothese soll lauten: Die Ausschusswahrscheinlichkeit unter den untersuchten Schrauben ist $H_0 : p \leq 0{,}93\ \%$.
Das Signifikanzniveau soll 5 % betragen.

d)
- Bestimmen Sie den Annahmebereich für diesen Hypothesentest.
- Beschreiben Sie die Bedeutung eines Fehlers 2. Art im Sachkontext der Aufgabe.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlicheit für einen Fehler 2. Art für den Fall, dass der Ausschussanteil auf 1,0 % gestiegen ist.
- Beurteilen Sie ein Untersuchungsergebnis von 22 defekten Schrauben. **(12 P)**

Manche Branchen, z. B. die Automobilindustrie, verlangen, dass die Ausschussquote den 1-Promille-Bereich nicht überschreiten darf. Um auch solche Firmen beliefern zu können, wird ein Teil der Produktion abgezweigt und einer speziellen Prüfung unterzogen. Man nimmt hierzu nur solche Schrauben, die von der Maschine Z_3 hergestellt wurden, da unter diesen der Anteil unbrauchbarer Schrauben von vornherein am geringsten zu erwarten ist (0,6 %).
Jede einzelne dieser Schrauben wird elektronisch auf Brauchbarkeit oder Unbrauchbarkeit getestet. Der Test erkennt 90 % der unbrauchbaren Schrauben als unbrauchbar und entfernt sie. Leider entfernt er irrtümlicherweise aber auch 2 % der brauchbaren Schrauben. Eine gegebene Schraubenauswahl kann mehrmals nacheinander getestet werden. Entfernte Schrauben werden nicht erneut getestet.
Nachdem eine vorgegebene Schraubenauswahl den Test n-mal durchlaufen hat, wird ihre Zusammensetzung modellhaft durch den Zustandsvektor $\vec{x}_n$ beschrieben. Es ist:

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} P_n(B) \\ P_n(\overline{B}) \\ P_n(E) \end{pmatrix}$$

Die Komponenten des Vektors sind die Wahrscheinlichkeiten für die in Klammern stehenden Ereignisse. Dabei steht B für „brauchbar“, $\overline{B}$ für „unbrauchbar“ und E für „entfernt“. Es gilt:

$$\vec{x}_{n+1} = M \cdot \vec{x}_n$$

e) • Begründen Sie, dass die Übergangsmatrix M durch die Form

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, und weisen Sie nach, dass $m_{31} = 0{,}02$ und $m_{32} = 0{,}9$ ist.

• Untersuchen Sie, ob der erwartete Anteil unbrauchbarer, aber noch nicht entfernter Schrauben nach einmaligem Durchlaufen des Testes die Forderung, er liege im 1-Promille-Bereich, erfüllt.

(7 P)

f) • Begründen Sie, dass $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Grenzverteilung der mit dem Testverfahren verbundenen Markov-Kette ist.

• Ermitteln Sie algebraisch die zugehörige Grenzmatrix.

• Begründen Sie die Grenzmatrix aus dem Sachkontext heraus. **(12 P)**